经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修3-1）

数学史选讲

SHUXUE

北京师范大学出版社

引　言

在整个中小学时代，数学是我们学习时间最长的学科之一．为了更好地学习数学，我们需要了解数学的历史．学习数学的一些历史，可以帮助我们了解数学发展的来龙去脉，了解数学在现实社会中的广泛应用，了解数学在人类文明发展中的作用和意义，提高学习数学的兴趣．

一门科学的历史是这门科学中最宝贵的部分，历史不仅能给我们知识，还能给我们智慧．我们选取了一些在数学史上具有典型意义的实例，通过这些实例介绍数学的思想和方法．

通过数学史的学习，我们会明白数学知识的积累是一个一点一滴的缓慢过程．它走过了一条曲折而漫长的道路．数学家们在创造这些知识的过程中，也是跌跌碰碰地前进，并且经常犯错误．了解这些，会消除我们对天才的盲目崇拜，从而增强自己的信心．

数学史是人类文明史中最灿烂、最光辉的一页，它与人类的进步密切地交织在一起．数学已经进入我们现代生活的方方面面．无论在航天、航海，还是电视、电话、计算机等方面，数学都起着主导作用．无法想象，我们的社会生活中没有了数学，会出现什么状况．

在数学史的学习中，我们能了解到古人研究了哪些基本问题，什么问题重要，什么问题不重要，可为我们日后选择研究问题提供借鉴；我们还可以了解到，古人是如何一步一步解决问题的，方法是如何进步的；同时，观察和领悟大师们在创造知识时的心智过程，会帮助我们增长智慧．

我们将讲授一些数学家的故事，从这些故事中，我们可以看到科学家们不屈不挠、勇于探索的精神，这些故事寓意深刻，可以给我们以多方面的启发．

前　　言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限. 选择能力是很重要的. 你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法："授之以鱼，不如授之以渔"，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高"自学能力"最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）? 20世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题，大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始. "有问题"也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成"问题意识"和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26册书组成：必修教材有5册；选修系列1有2册，选修系列2有3册，它们体现了发展的基本方向；选修系列3有6册，选修系列4有10册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的"练习"；一类是课后的"习题"，分为A，B两组；还有一类是复习题，分为A，B，C三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

究、思考交流等研究性学习过程．另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”．

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分．

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动．在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有意思的工作．

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异．计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源．在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”．它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想．教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解．在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解．教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考．

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值．

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功，请将你们成功的经验告诉我们，以便让更多的朋友分享你们成功的喜悦．

我们的联系方式是：北京师范大学出版社基础教育分社（100875），010-58802811．

营销中心电话　010—58802783
服务中心电话　010—58802795
邮购科电话　010—58808083
传　　　　真　010—58802838
学科编辑电话　010—58802811　58802790
电子邮箱　shuxue3@bnup.com.cn
通信地址　北京师范大学出版社基础教育分社(100875)

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：北京京师印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：210 mm×297 mm
印　　张：6.75
字　　数：128千字
版　　次：2008年5月第3版
印　　次：2008年5月第1次印刷
定　　价：5.70元
ISBN 978-7-303-07371-0

责任编辑：焦维红　邢白兴　装帧设计：高　霞
责任校对：陈　民　　　　　责任印制：吕少波　吴祖义

版权所有　侵权必究

反盗版、侵权举报电话：010—58800697
北京读者服务部电话：010—58808104
外埠邮购电话：010—58808083
本书如有印装质量问题，请与印制管理部联系调换。
印制管理部电话：010—58800825

目　　录

第一章 数学发展概述

英国科学史家丹皮尔(W. C. Dampier)曾经说过:“再没有什么故事能比科学思想发展的故事更有魅力了.”

本章将简单地介绍数学发展的基本脉络,使我们对于数学发展的特点和取得的重要成果有一个感性的认识,初步了解数学在人类发展中的意义和作用.

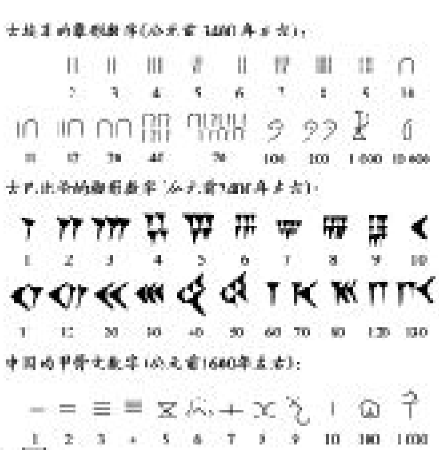
§1 从数学的起源、早期发展到初等数学形成

一、数学的起源、早期发展

大约在30万年以前,人类就形成了数的概念,它对于人类文明的意义并不亚于火种的作用.数的概念的产生可以看作数学发展的起点.到公元前6世纪,数学已经成为人类认识世界和改造世界的重要工具,我们通常把这个时期称为数学的起源与早期发展阶段.这个阶段主要的标志是:数的概念、记数系统、算术、几何等初步形成.

1. 数的概念和记数系统

人类从记录自己的“劳动成果”开始逐渐产生了数感,同时自然地感到有必要用某种方式来表示这些“劳动成果”,这便产生了记数.不同的文明创造出了不同的记数系统.古埃及、古巴比伦和中国的记数系统很具有代表性.



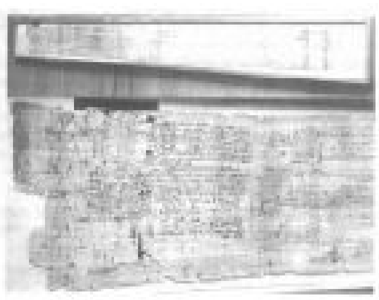
2. 经验几何的发展

人类在生产实践活动中,逐渐对最简单的几何概念诸如直线、

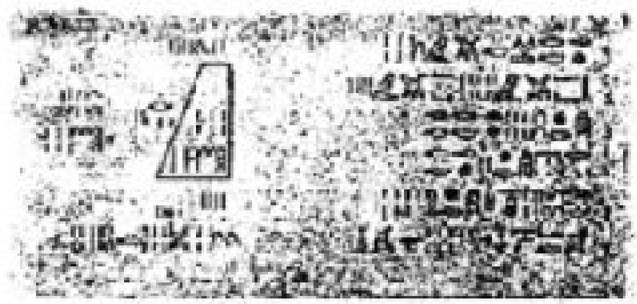
圆、角、长度、面积等有了初步的认识.

在现存中国最早的数学著作《周髀算经》中，就记载了勾股定理的特例. 西周开国时期（约公元前 12 世纪），周公与大夫商高讨论勾股测量问题，商高在回答周公问时，提到"勾广三，股修四，径隅五"，即现在我们常说的"勾三股四弦五". 除此之外，中国在计算一些图形的面积和体积方面也取得了进展.

古埃及人在几何方面同样取得了一些成就. 我们对古埃及数学的了解主要根据 19 世纪中期和末期发现的两卷纸草书. 一卷是苏格兰人莱茵德（Henry Rhind）于 1858 年获得的，现存英国博物馆，称"莱茵德草卷". 大约于公元前 1650 年前后写出，其中包含 85 个数学问题. 另一卷是俄国人戈列尼雪夫（В. С. Голенищев）于 1893 年获得的，并于 1912 年存入莫斯科博物馆，故称"莫斯科草卷". 据考证，它比"莱茵德草卷"早 2 个世纪，其中包括 25 个数学问题. 在这两部纸草书中，不仅有正方形、矩形、等腰梯形等图形面积的正确计算公式，而且还给出了圆面积的近似计算法. 此外，古埃及人在体积计算方面也达到很精确的地步，比如他们给出了计算平截头方锥体积的公式等.

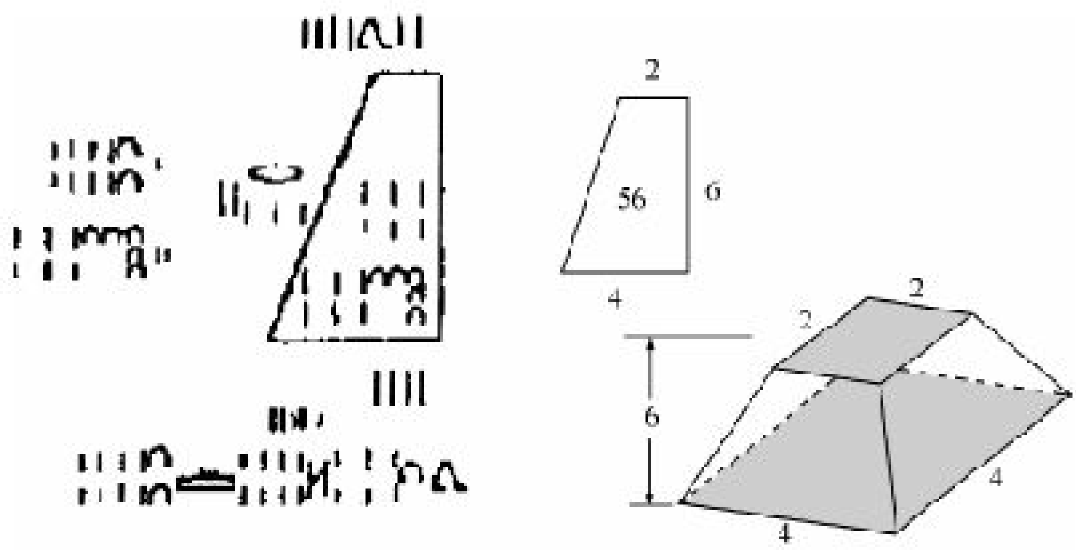


莱茵德草卷



莫斯科草卷

古巴比伦人在几何上的成就同样引人注目，通过出土的约 50 万块泥版文书获知，他们不仅掌握了三角形、矩形、梯形等平面图形的面积公式，而且也掌握了棱柱、平截头方锥等立体图形的体积公式.



莫斯科草卷中的平截头方锥

在古印度的《绳法经》(Sulva sutras)中，经验几何的成果也有所体现，如勾股定理、矩形对角线的性质、相似三角形、相似四边形及相似五边形的性质，一些作图法包括化圆为方，等等.

3. 算术

在前面介绍的那两部纸草书中，我们还可以了解到，古埃及人不仅掌握自然数的基本算术四则运算，并且已经把它们推广到了分数．他们还发现了求近似平方根的方法，以及能够解包括一次方程和某些类型的二次方程问题.

通过已经出土的约50万块泥版文书得知，古巴比伦人在算术方面也达到了相当高的水平. 他们的计数系统是一套以60进制为主的楔形文字记数系统，他们知道“位置值”的概念，不仅擅长计算，而且表现出发展程序化算法的意向，例如开方运算；此外，古巴比伦人已经能解一般的二次三项方程式，等等.

中国的算术也十分发达. 算术计算是在算板上进行的，特别是计算分数时，我们的古人已经会使用公分母的分数计算法则了.

上面，我们简单列举了一些文明古国在数学上取得的辉煌成就，但是从总体来看，解决的只是一些特殊的数学问题．这些数学成就都是由经验来确定的，仍然处于原始积累时期. 这就是这一时期数学发展的特点.

二、初等数学(常量数学)的形成

到公元前6世纪，数学已经成为人类认识世界、改造世界的重要工具．随着社会和生产的发展，大量数学知识的不断累积，对其进行系统地整理与理论概括就成了一种必然趋势．到公元16世纪，这些系统的整理和理论概括形成了初等数学，也是我们常说的常量数学.

初等数学包括一些主要的数学分支：算术、几何、代数、三角．它的基本成果构成了现在中学数学的主要内容．这个过程延续了两千年左右．

从内容上，初等数学可以分为两部分：几何和代数．在初等数学发展的过程中，中国、希腊、阿拉伯国家、印度等都作出了重大的贡献. 在文艺复兴时期，欧洲的一些国家也为初等数学的发展作出了杰出的贡献．

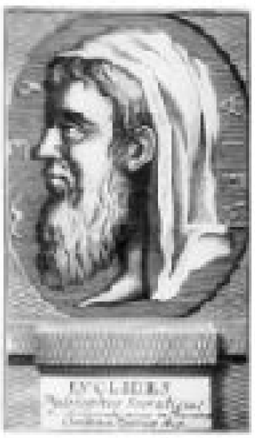
下面我们简要介绍他们所作出的一些重要贡献．

1. 希腊

古希腊文明起始于公元前6世纪，终止于公元6世纪．在这一时期，希腊数学十分活跃，特别在公元前3世纪，希腊数学的发展达到了一个顶峰．古代最伟大的几何学家欧多克斯(Eudoxus，约公元前

408—公元前 347)、欧几里得(Euclid,出生年月不详)、阿基米德(Archimedes,公元前 287—公元前 212)、阿波罗尼奥斯(Apollonius of Perge,约公元前 262—公元前 190)是这个时期的代表人物.

古希腊数学最引人注目的贡献有两条:首先,古希腊人认为所有的数学结论只有通过演绎推理才能确定;其次,古希腊人将数学抽象化,他们认为抽象概念才是永恒的、理想的和完美的,而物质实体则是短暂的、不完善的和易腐朽的. 坚持数学中的演绎法和抽象方法,希腊人创造了我们今天所看到的这门学科.



欧几里得

在前人基础上,欧几里得对数学进行了系统整理和理论概括,他的著作《原本》(Elements)是以最基本的概念、公设、公理为推理的出发点,推导出一系列定理和结论,这就是公理化思想(更详细内容请见第三章). 欧几里得的《原本》是数学史上的第一座理论丰碑,其最大的功绩在于确立了数学中的演绎范式.

除欧氏几何外,古希腊人在几何方面还取得了许多非常重要的成就. 他们研究了圆锥曲线:椭圆、双曲线和抛物线;证明了某些属于射影几何的定理;以天文学为指南,建立了球面几何以及三角学的原理,并计算出最初的一些正弦表;确定了一系列复杂的面积和体积;在几何学方面希腊人已接近"高等数学";阿基米德对面积与体积的计算接近于积分计算.

在算术和代数的领域中,古希腊人也做了不少工作. 他们奠定了数论的基础. 例如,他们证明了素数的无限性并发现了寻找素数的埃拉托斯特尼筛法(Sieve of Eratosthenes). 丢番图(Diophantus)的《算术》(Arithmetica)是古希腊人在代数方面取得的最高成就,书中不仅解决了许多不定方程问题,而且开始用一套缩写符号来表示代数问题,这为以后符号数学的发展开了先河.

但是古希腊数学也存在着不足,它们打开了无理数的大门,却又把它关上了. 它们的代数学没有负数,也没有 0.

由于罗马人的入侵,古希腊文明逐渐走向衰败,其光辉灿烂的历史慢慢降下了帷幕. 西方进入了漫长的宗教统治的中世纪,古希腊人所追求的理性精神也进入了深眠状态. 随着希腊文明的结束,数学发展的中心转移到了东方.

2. 中国

中国对于数学的贡献是独立于西方的,中国数学在这段时期取得了许多伟大的成就.《九章算术》是中国古代最重要的数学著作. 据现代的考证,这部著作的成书时期至少是公元前 1 世纪,但是其中有些数学内容可以追溯到周代.《周礼》记载西周贵族子弟必学的六门课程("六艺")中有一门是"九数",在刘徽《九章算术注》的"序"中,

称《九章算术》是由"九数"发展而来的.《九章算术》包含了丰富的数学成果,例如,算术方面的比例算法、盈不足术,代数方面的方程术、正负术、开方术,等等.公元263年刘徽撰《九章算术注》,其中刘徽的割圆术是极限思想的萌芽.刘徽和南北朝时期的祖暅计算球体积的方法是积分学的萌芽.公元5世纪的《张邱建算经》中提出了世界著名的百鸡问题:

"鸡翁一,值钱五,鸡母一,值钱三,鸡雏三,值钱一.百钱买百鸡,问鸡翁母雏各几何?"

张邱建给出了3组答案,他是数学史上给出一题多解的第一人.

当时,中国对圆周率的探索处于世界领先地位,下表列出了中国对圆周率计算的历史进展.

3　　径一周三	《周髀算经》
3.154 7	刘歆(西汉末)
$\frac{22}{7}$(约率)	何承天(370—447)
$3.141\ 024<\pi<3.142\ 704$ $\frac{157}{50}=3.14$	刘徽(3—4世纪)
$3.141\ 592\ 6<\pi<3.141\ 592\ 7$	祖冲之(429—500)
$\frac{355}{113}$(密率)	祖冲之

祖冲之不但给出了密率,而且给出了π的上、下界.他的这个记录保持了一千多年的领先地位,直到15世纪才为阿拉伯数学家卡西(Jemshid al-Kashi)所超过.卡西在1429年算到了π的小数点后16位.

从南北朝末期到北宋初期,约500年,我国在数学上又积累了丰富的知识,到宋元时期达到了新的高潮,特别是在代数方面取得了一系列世界一流的成果.

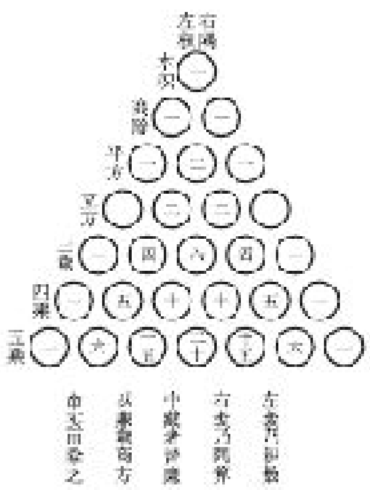
我国南朝的《孙子算经》中有"物不知数"问题,通常称作"孙子问题".原题是:

"今有物不知其数,三三数之剩二,五五数之剩三,七七数之剩二,问物几何?"

这是一个解一次同余方程组的问题,孙子给出了解法,这就是著名的孙子定理.在此基础上,秦九韶(约1202—1261)把这个问题和解法进行了推广,他发明了用辗转相除法求乘率的一般方法,并把这种解法叫"大衍求一术".此外,他还把孙子定理推广到模不两两互素的

情形. 现在,国际上称孙子定理为“中国剩余定理”. 在西方,直到 18 世纪瑞士的欧拉(L. Euler, 1707—1783)和法国的拉格朗日(J. L. Lagrange, 1736—1813)才对同余式进行了系统的研究,较之秦九韶晚了 5 个世纪.

杨辉的著作《详解九章算法》中有一张珍贵的图——“开方作法本源图”,并指出,此图“出《释锁算书》(已失传),贾宪用此术”. 就是说,这张图是贾宪创造的,现在叫“贾宪三角”. 这张图给出了指数为正整数的二项式展开的系数表(如下图所示):



西方人把上述三角叫作“帕斯卡三角形”.

宋元数学发展的一个最深刻的动向是向代数符号化的进展,这就是天元术与四元术的出现. 元朝李冶所著《测圆海镜》(1248 年)和《益古演段》(1259 年)是最先阐述天元术的著作. 天元术就是设未知数布列方程的一般方法. 用天元术列方程的方法与代数中列方程的方法类似, 首先“立天元一为某某”,“天元一”就表示未知数, 相当于 x,然后列出方程.

李冶之后,朱世杰(1300 年前后)把天元术从一个未知数的情况推广到两个、三个及四个的情况,而考虑四元高次联立方程组,这就是四元术. 李冶的天元术和朱世杰的四元术是一种半符号式的文字代数. 此外,朱世杰在《四元玉鉴》中研究了高阶等差级数和内插法.

朱世杰还是一个教育家,他编写了一部很好的数学启蒙教材《算学启蒙》,在这部书中他给出了正负数乘除法的法则.

从上面的论述中可以看出,在古代,中国数学为世界数学的发展作出了重大贡献.

3. 印度和阿拉伯世界

印度人发明了现代记数法. 他们引进了负数和零,不仅把正数和负数的对立与财产和债务的对立联系起来,而且把正数和负数的对立与直线上两个方向的对立联系起来. 在这个时期,他们已经能够像运用有理数一样运用无理数,从而为代数打开了真正的发展道路.

在代数方面阿拉伯人的第一个贡献是提供了这个学科的名称.西文"algebra"(代数)这个词起源于花拉子模的数学家和天文学家花拉子米(Mohammed ibn Musa al-khowarizmi,约 783—约 850)著的《代数学》一书的书名,它可意译为《移项和消去的科学》.这部书一直保留到现在.在很长一段时间里,代数学(al-jabr 或 algebra)这个术语一直是方程学的同义词.

波斯诗人兼数学家奥马·海亚姆(Omar Khayyam,1048?—1131)把代数定义为解方程的科学.这个定义一直保持到 19 世纪末.他还用几何方法解出了各种类型的三次方程,并求出了这些方程的正实根.

4. 欧洲文艺复兴时期

文艺复兴时期,欧洲人开始向阿拉伯人学习.在向阿拉伯人学习的过程中熟识了希腊数学,并且接受了从阿拉伯传来的印度记数法,摒弃了早先来自希腊和罗马的记数法.到 16 世纪,欧洲的数学终于走到了世界的最前列.例如,意大利人给出了三次方程和四次方程的解法.

这个时期出现了虚数.现代的代数符号也逐渐产生出来(见第二章).英国人纳皮尔(J. Napier,1550—1617)发明了对数,并在 1614 年发表.1624 年布里格斯(H. Briggs,1561—1631)计算出第一批十进位对数表.

当时欧洲人建立了级数的概念,开始了对"组合论"和"二项式定理"的研究,并且完成了初等数学体系的建立,为以后从常量数学向变量数学过渡奠定了基础.

习题 1—1

1. 列举所了解的不同的记数方法,比较十进制与六十进制的差异.
2. 收集有关中国古代数学的成就.

§2 从变量数学到现代数学

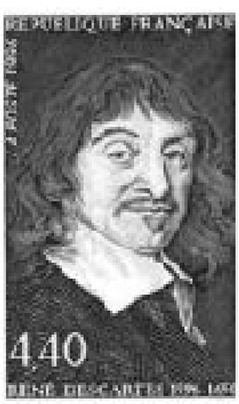
一、变量数学

16 世纪的欧洲，封建制度开始消亡，资本主义开始发展并兴盛起来．在这一时期，家庭手工业、手工业作坊逐渐地改革为工场手工业生产，并进而转化为以使用机器为主的大工业；同时，世界贸易的高涨导致航海业的空前繁荣，而航海业需要更准确的天文知识；武器的改进刺激了弹道问题的研究；等等．所有这些对数学提出了新的、更高的要求．

由于实践的需要和各门科学的发展，使自然科学转向对运动和变化的研究、对各种变化过程的研究、对各种变化着的量之间依赖关系的研究．因此，对运动和变化的研究成为了自然科学研究的中心问题．为了进一步反映"变化着的量"的一般性质和它们之间的依赖关系，数学中产生了变量和函数的概念．数学研究对象发生了根本性的拓展．这些决定了数学向新的阶段，即向变量数学的过渡．

这一阶段的肇始是解析几何与微积分的诞生与发展．

1．解析几何的诞生



笛卡儿

解析几何的创立是变量数学发展的第一个里程碑．1637 年笛卡儿(R. Descartes，1596—1650)的著作《几何学》是这一里程碑的标志．虽然它是作为笛卡儿哲学名著《方法论》(Discourse on Method)的附录发表的，但是它奠定了解析几何的基础．从此，变量进入了数学，运动进入了数学．恩格斯指出：

"数学中的转折点是笛卡儿的变数．有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了……"

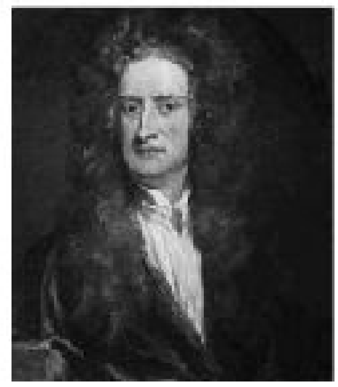
(恩格斯．自然辩证法．北京：人民出版社，1971．236)

发生这个转折之前，数学中占统治地位的是常量，而在此之后，数学转向研究变量．在《几何学》里，笛卡儿给出了"字母符号的代数"和"解析几何原理"．他引进了坐标系，并利用坐标方法把含有两个未知数的代数方程看成平面上的一条曲线．

在笛卡儿之前，在数学中起主导作用的一直是几何学．笛卡儿把数学引向一个新的方向，这就使代数获得了更重大的意义．

2．微积分

17 世纪后半叶，牛顿(Isaac Newton，1642—1727)和莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646—1716)分别独立地建立了微积分，在变量数学的发展中，这是第二个决定性的步骤.


牛顿

微积分的起源主要来自两方面的问题：一方面来自力学中的一些新问题，例如，已知路程对时间的关系，求速度；已知速度对时间的关系，求路程. 另一方面来自几何学中的一些古老的问题，例如，如何作曲线的切线，如何确定面积和体积等问题.

在古希腊，阿基米德和阿波罗尼奥斯曾研究过这些问题，17 世纪初期开普勒(Johannes Kepler，1571—1630)，卡瓦列里(Bonaventura Cavalieri，1598—1647)、费马(Pierre de Fermat，1601—1665)、巴罗(Isaac Barrow，1630—1677)以及许多其他数学家也对这些问题做了较为深入的研究. 但是，直到牛顿和莱布尼茨，他们才以科学家敏锐的洞察力，发现这两类问题之间的内在联系，即导数与积分的关系，并给出了解决这些问题的一般方法，得到了数学上最伟大的成就. 微积分的发现不仅在数学史上具有划时代的意义，而且在科学史上也具有决定性的意义.


莱布尼茨

除了变量与函数概念以外，这个阶段还形成了极限的概念，极限不仅是微积分的基础，而且是进一步发展的整个分析的基础.

伴随着微积分的发展，还产生了分析的另外一些数学分支：级数理论、微分方程论、微分几何等. 所有这些理论都是因为力学、物理学和技术问题的需要而产生并向前发展的.

在这个时期，还产生了另一个重要的数学分支——概率论. 它研究“随机现象”的规律，并且给出了研究“偶然性中的必然性”的数学方法.

二、现代数学

从 16 世纪到 19 世纪初是数学最活跃的时期，产生了很多新的数学概念、数学思想和数学结果，奠定了现代数学发展的基础. 随着这些新的数学概念、数学思想和数学结果的不断丰富和积累，一方面，人们迫切地需要对它们进行系统整理和理论概括；另一方面，人们又不断地发现数学与其他学科的联系，不断地发现数学在科学、技术和人文社会科学等各个领域中的应用. 特别是在 20 世纪中期，由于计算机的诞生和飞速发展，使得数学的应用越来越广泛，越来越深入.

1. 基础数学

现代数学发展的最初阶段，是以基础学科代数、几何、分析的深刻变化为特征的，它反映了数学基础的深刻变化. 这些变化主要体现在研究对象的拓展、研究方法的创新和新研究领域的形成上.

(1)几何

19 世纪上半叶,波约(J. Bolyai, 1802—1860)和罗巴切夫斯基(N. I. Lobatchevsky, 1793—1856)建立了新的几何——非欧几何学.正是从这个时候起,几何学才发生了本质上的变化,开创了新的发展时期,改变了传统上对"几何学是什么"的认识和理解,使得几何学的研究对象与使用范围迅速扩大.继罗巴切夫斯基之后,1854 年德国著名数学家黎曼(G. F. Riemann, 1826—1866)完成了在几何学发展中最重要的工作,他提出了"几何空间种类有无限多"的一般思想,并指出这些空间可能的现实意义.

对欧几里得几何本身的研究也发生了很大的变化.研究的对象已经不再局限于平面和空间的图形,而是研究更为复杂的图形性质.出现了一些崭新的方法.在欧几里得几何研究的基础上,开拓了许多新的研究领域,例如,罗巴切夫斯基空间、射影空间,各种不同维数的欧氏空间、黎曼空间、拓扑空间等.需要强调的是,在科学技术的发展中,这些空间都找到了它们的具体实际背景和应用.

(2)代数

19 世纪以前,代数是关于数字算术运算的学说.在代数中,凡是量都以字母来表示,按照一定的法则对这些字母进行运算.到了 19 世纪,代数出现了质的变化.现代代数在保持传统研究对象的同时,又把它大大地推广了.现代代数中的"量"远远超出了数的范围,例如,图形的"变换"、数字的"置换"等,这些都是现代代数中的"量".现代代数研究对这些"量"进行运算,在某种程度上这些运算与加、减、乘、除等普通算术运算是类似的.

19 世纪上半叶,一批著名的数学家为现代代数理论的形成作出了重大贡献,法国青年数学家伽罗瓦(Evariste Galois, 1811—1832)是最杰出的代表.现代代数的概念、方法和结果在分析、几何、物理以及结晶学中都有重大的应用.群论与线性代数是现代代数中最重要的两个分支,内容丰富、应用广泛.

(3)分析

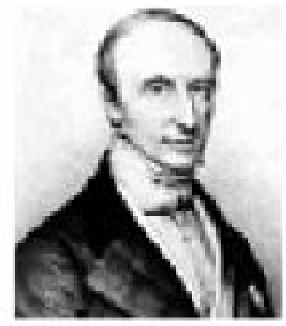
以微积分为主要内容的分析也发生了深刻的变化.首先,形成了分析的严格的、精确的基础;对分析的基本概念给出了严格的定义,例如,实数、函数、极限、微分、积分等.这些基础的建立对数学的发展产生了深刻的影响.

在分析中发展出一系列新的分支.例如,微分方程理论、积分方程理论、函数逼近论、泛函分析等.这些分支在数学的发展中起着重要的作用.

这些工作是由一批杰出的数学家完成的,其中有捷克数学家波尔

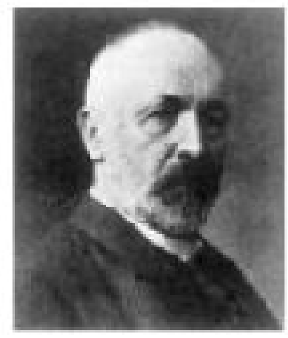
查诺(B. Bolzano，1781—1848)、法国数学家柯西(A-L. Cauchy，1789—1851)、德国数学家魏尔斯特拉斯(Karl Weierstrass，1815—1897)、戴德金(J. W. R. Dedekind，1831—1916)等.

在这一发展时期，我们还必须提到德国著名数学家康托(G. Cantor，1845—1918). 他在19世纪末创立了集合论. 集合论的产生改变了人们许多传统的观念，促进了许多其他数学新分支的产生和发展，对数学发展的一般进程产生了深刻的影响. 例如，数理逻辑的产生，一方面，数理逻辑溯源于数学的起源和基础；另一方面，它又和计算技术的最新课题紧密相连，数理逻辑得到了许多深刻的成果. 例如，哥德尔的不完全定理等. 从哲学的认识论观点看来，这些成果也是非常重要的.



柯西

进入20世纪后，数学的各个分支都取得了实质性的进展. 我们知道，数学问题和解决数学问题的思想方法是引领数学发展的基本动力. 例如，20世纪初，著名数学家希尔伯特(David Hilbert，1862—1943)提出了23个重要的数学问题，在很大程度上影响了20世纪数学的发展. 随着这些问题的解决，推动了许多数学分支的深入发展，促进了一些新的数学分支的形成，揭示了不同数学分支之间的内在联系. 20世纪出现了一大批令人鼓舞的伟大成就. 例如，历时300年之久的"费马大定理"在20世纪末被英国数学家维尔斯解决，这是一项举世瞩目的成果. 所有这些都表明，无论在深度上还是在广度上，数学都获得了空前的发展.



康托

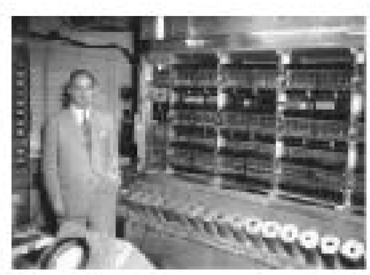
2. 计算机与数学

计算机的产生和发展与数学家的贡献密不可分. 人们把著名的数学家图灵(A. Turing，1912—1954)和冯·诺依曼(Von Neumann，1903—1957)称为"计算机之父". 计算机诞生之后，数学与计算机的密切结合、相辅相成成为现代数学发展的一个重要特征. 计算机是数学与工程技术完美结合的产物，也是抽象数学应用的典范.

图灵

计算机的设计、使用和改造不仅提出了大量的数学问题，为数学中许多分支的理论发展注入了新的活力，而且正日益成为数学研究的得力工具，从而得到了数学研究人员的青睐，也改变了数学研究的模式.

计算机也为纯粹数学的发展带来了福音. 随着计算机在数学中的应用及影响，过去研究纯粹数学只需一张纸和一支笔的时代已经一去不复返了. 如今，计算机不仅为数学家进行大量计算节省了宝贵的时间，而且渗透到了各个纯粹数学分支，解决了许多重大数学问题，促进了一些新的数学分支的产生. 四色定理的计算机证明是第一个鼓舞人心的范例：1976年1月到6月，伊利诺大学的哈肯(W. Haken)和阿佩



冯·诺依曼

尔(K. Appel)借助 3 台计算机运行了一千多个小时终于成功证明了四色猜想.

3. 数学应用

20 世纪中期,数学发展的最显著特点是数学应用的广泛. 数学在科学技术的各个领域有着广泛的应用,在人文社会科学中也开始发挥着越来越大的作用,例如经济科学、管理科学、语言文字等,数学已经深入到人们日常生活的方方面面.

在数学中,出现了一批有着广泛应用前景的应用数学分支,例如数理统计、运筹学、控制论、信息论、博弈论等;同时,出现了一批交叉学科的数学分支,例如数学物理、生物数学、数理经济学、数理化学、数学地质学、数学气象学、数理语言学、数理心理学、数学考古学、计量史学等.

伴随着计算机的发展,数学的应用开拓了更为广阔的天地. "高科技本质上是数学技术"这一观念已经被越来越多的人所接受. 例如,军事、经济和信息技术中广泛应用的密码技术;医学上广泛应用的 CT 成像和核磁共振技术;飞机设计、原子弹试验中采用的计算机模拟技术;天气预报等领域中采用的大型数值计算技术;图形传播中的"数据压缩"技术等. 所有这些技术都是建立在数学基础上的.

习题 1—2

1. 简要叙述数学发展的基本脉络.
2. 搜集整理数学发展中的相关资料,体会数学在人类文明历史发展中的作用.
3. 搜集有关变量和函数的历史资料,体会函数进入中学的作用和意义.

复习题一

思考和总结自己学过的数学知识和思想方法，体会这些知识和思想方法在数学发展中的位置和作用.

第二章 数与符号

用十个记号来表示一切数，每个记号不但有绝对值，而且有位置的值，这种巧妙的方法出自印度．这是一个深远而又重要的思想，它今天看来如此简单，以致我们忽视了它的真正伟绩．但恰恰是它的简单性以及对一切计算都提供了极大的方便，才使我们的算术在一切有用的文明中列在首位；而当我们想到它竟逃过了古代最伟大的两个人物阿基米德和阿波罗尼奥斯的天才思想的关注时，我们更感到这成就的伟大了．

——拉普拉斯

数是数学的最核心内容之一，符号是表达数学思想的最基本的工具，了解它们产生和发展对于理解和学习数学是非常有意义的．

数是我们司空见惯的东西．可是，你想过没有：我们的祖先是怎样认识自然数的？为什么很长一段时间内人们拒绝负数？为什么毕达哥拉斯学派不接受无理数？数学符号是什么时候诞生的？为了回答这些问题，我们需要探索数的发展史．

§1 数的表示与十进制

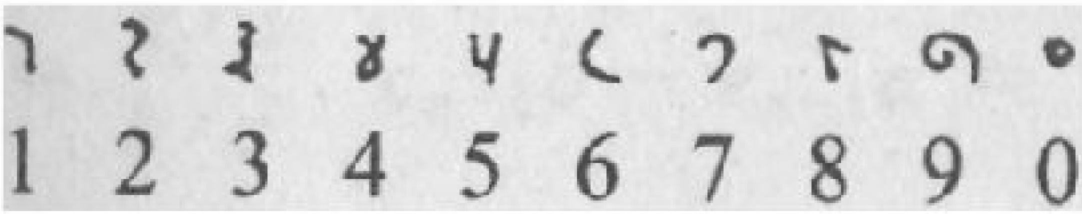
每个历史都有一个开端，数也一样．从远古时代人类用手指、石子、贝壳和结绳等实物记数，发展到后来刻痕记数、符号记数，直到现在大家用“0，1，2，3，4，5，6，7，8，9”十个符号来表示一切数，这是一个曲折而又漫长的过程．

中国甲骨文

中国是最早采用十进制的国家，这是一个伟大的成就．在商代中期的甲骨文中已有十进位，其中最大的数为三万．到春秋战国时代，开始出现严格的“十进位值制筹算”记数．这种十进位制记数法是中国古代数学对人类文明的特殊贡献．

现在通用的记数法叫作阿拉伯记数法，但这种叫法并不准确，应该叫印度—阿拉伯记数法．最早的样品是在印度的一些石柱上发现的，这些石柱大约是公元前 250 年乌索库王建造的．

有一块公元 876 年的石碑，因存于印度中央邦西北地区的瓜廖尔(Gwalior)城而以瓜廖尔石碑著称．瓜廖尔数系为：



瓜廖尔数系

印度数码在公元 8 世纪传入阿拉伯国家，后又通过阿拉伯人传入欧洲．印度数码和“十进位值制”记数法被欧洲人普遍接受之后，欧洲人开始在近代科学的进步中扮演了重要的角色．

“十进位值制”记数法的最重要思想是“位值制”．首先，“位值制”是指用“有限个符号”——数字来表示数值；其次，数字所在位置不同，它所表示的数值也不同；“十进”是指逢十进一．在这种记数法中，每个数所代表的大小，一方面与数字本身有关，另一方面又与它写在什么位置有关．例如，8 在个位上表示“8”，在十位上则表示“10 乘 8”，在百位上则表示“100 乘 8”，在千位上则表示“1 000 乘 8”……这就是要知数大小“先知其位”的道理．有了这个位值的思想，我们就可以用“十个符号”来表示无限多个自然数了．

历史上曾出现各种各样的进位制，有二进制、三进制、五进制、八进制、十二进制、十六进制、二十进制、六十进制等．中国、埃及、印度采用十进制，巴比伦人采用六十进制，罗马人采用十二进制，玛雅人采用二十进制．

记数法与十进制的诞生是科学发展史上一次重大的飞跃，是人类文明史中的一座丰碑．

习　题　2—1

1．在我国古代，一斤等于十六两，一两等于十六钱．现有一种器皿，每只重二斤十二两三钱，有八只，问共重多少？体会在不同进制下运算的规则．感受十进制给我们带来的好处．

2．搜集整理有关二进制的材料，体会二进制与十进制的差异．

§2　数的扩充

“数”发展的历史顺序大体是：正整数、分数、无理数、负数、零、虚数（复数）. 数在各个国家的发展不尽相同. 分数的产生在大多数民族都没有发生困难，但无理数的产生在古希腊引发了第一次数学危机. 中国是世界上对负数认识最早的国家，负数是在《九章算术》中首先出现的. 但欧洲人承认负数却在 16 世纪，比中国晚了一千多年.

一、无理数的发现

在“数”的发展史上，希腊的毕达哥拉斯学派发现了“无理数”. 毕达哥拉斯学派基本的信条是“万物皆数”. 他们所说的数仅指整数，分数被看成两个整数之比，他们相信任何量都可以表示成两个整数之比. 给定两条线段一定有一个公共度量，也就是说，给定任何两条线段，一定能找到第三条线段，也许很短，使得给定的线段都是这条线段的整数倍. 由此可以得到结论，任何两条线段的比都是整数的比，或者说，这个比是有理数. 然而，毕达哥拉斯学派的成员希帕苏斯（Hippasus，公元前 470 年左右）后来发现：并不是任意两条线段都有一个公共度量，即给定单位线段，存在着不可公度的线段.

现在假设一个直角三角形的两条直角边的长度是 1，那么斜边的长度是多少呢（如图 2-1 所示）？

图 2-1

设斜边长为 x，根据勾股定理可得

$$x^2=1^2+1^2=2.$$

因此斜边长度 x 必定是其平方为 2 的一个数. 我们将平方是 2 的数用$\sqrt{2}$表示，而且称它是 2 的平方根. 但是$\sqrt{2}$等于多少呢？它能否写成两个整数比的形式呢？

答案是否定的，即没有任何一个分数其平方为 2. 也就是说$\sqrt{2}$不是有理数.

定理　$\sqrt{2}$**是无理数.**

首先，我们指出下面的简单事实：

偶数的平方是偶数，奇数的平方是奇数；

如果一个数的平方是偶数，那么这个数一定是偶数；

如果一个数的平方是奇数，那么这个数一定是奇数.

证明（反证法）　假定定理的结论不成立：$\sqrt{2}$不是无理数，而是有

理数，即$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$.

通过约分，我们一定可以使得 p 和 q 没有公因数. 这样一来，p，q 不会同时是偶数.

由于 $$p=\sqrt{2}q,$$
平方得 $$p^2=2q^2.$$

所以，p^2 是偶数，从而 p 也是偶数. 设 $p=2r$（r 是整数），这时上式变为

$$4r^2=2q^2,\text{即 } q^2=2r^2.$$

这样，q^2 是偶数，从而 q 也是偶数，这与 p，q 不会同时是偶数相矛盾. 假设$\sqrt{2}$是有理数导致了矛盾. 因此，必须放弃这个假设. 定理证毕.

这个证明可以在欧几里得的《原本》中找到，实际上远在欧几里得之前就已经有了证明. 这是间接证明的一个最经典的例子.

二、负数的引入

在生产实践中，人们往往需要测量具有相反意义的量，例如海拔高度等，因此负数也就应运而生了.

我国公元 3 世纪的刘徽已经对负数有了深刻的认识. 在《九章算术注》中，他认为“今两算得失相反，要令正负以名之.”他还认为“言负者未必负于少，言正者未必正于多.”这两句话都是关于正负数的绝对值而言的，即负数的绝对值未必小、正数的绝对值未必大. 这种思想与现代的数学思想是完全一致的. 元朝的朱世杰在《算学启蒙》（1299 年）中第一次明确提出正负数的乘除法则，他指出“同名相乘为正，异名相乘为负.”

无论引入负数，还是引入无理数，都是数系扩充的重大步骤，也是人类对数系认识的重大进展. 古希腊人是通过演绎思维发现了无理数，而中国古代的算学家则是通过算法思维引入了负数.

在 7 世纪，印度数学家也开始使用负数. 负数通过阿拉伯人的著作传入欧洲，但是，到了 16，17 世纪，欧洲的大多数数学家并不承认它是数，也不认为它是方程的根. 一些数学家们甚至把负数称为荒谬的数，例如，著名数学家巴斯卡认为，从 0 减去 4 纯粹是胡说.

1629 年，吉拉尔（Albert Girard，1590—1633）出版了他的著作《代数新发现》. 在这本书中，他明确主张：负数和正数具有同等的地位；负数可以作为方程的根. 他还指出，负数是正数的相反数. 直到这个时期，在欧洲的数学舞台上，负数终于获得了一席之地.

三、0 的发现

人类很早发现了正整数、无理数、负数，但是，“0”的发现却晚得多.“0”最早源自于人们表示的“没有”，用一个空位来表示它，后来才逐渐地把它当成一个数来认识，这是一个漫长的过程.

在我国，战国时期人们就用“空”表示“0”了，但没有把“空”看作是一个单独的数.

印度人起初也用空位表示“0”，后记成“点”，最后发展为“圈”. 直到公元 11 世纪，包括有“0”的印度数码和十进制记数法臻于成熟. 特别是印度人不仅把“0”看作是记数法中的空位，而且也把它看作可施行运算的一个特殊的数. “0”的发明是印度对世界文明的杰出贡献.

四、虚数

前面讲述的数都是由实际应用产生的，虚数(复数)则是由数学问题引入的.

印度数学家婆什迦罗(Bhaskara Ⅱ，1114—约 1185)是第一个遇到“虚数”的人. 他认为 $x^2=-1$ 这个式子没有意义，他说：“正数的平方是正数，负数的平方是正数. 因此，一个正数的平方根有二：一正一负；负数没有平方根，因为它不是一个数.”

又过了 300 年之后，生命之船驶进 1484 年，法国数学家舒开(Chuquet，1445—1500)在《算术三篇》中，讨论了解二次方程 $4+x^2=3x$ 的问题，得到根 $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-4}$. 由于 $2\frac{1}{4}-4$ 是负数，负数要开平方，这是他从未见过的怪物，他立刻写道：这根是不可能的. 继印度人之后，舒开成为在其数学著作中讨论这种数的第二人. 很明显，舒开已经拨响虚数概念的琴弦，却又把弦弄断了，推迟了虚数概念的降生.

61 年后，第一个承认和认真讨论虚数的人是意大利数学家、怪杰卡尔丹(G. Cardano，1501—1576). 他在《大法》(Ars Magna)中提出了一个问题：“两数的和是 10，积是 40，求这两个数.”他给出的运算方法用现代符号表示是这样的，设一个数为 x，另一个数为 $10-x$，可列出方程

$$x(10-x)=40,$$

整理得

$$x^2-10x+40=0.$$

他得到两个奇怪的根：$x_1=5-\sqrt{-15}$ 和 $x_2=5-\sqrt{-15}$.

卡尔丹心知肚明，一个负数要开平方是不允许的，但是在解方程中却产生了这个事实，他无法解释，负数的平方根是不是“数”，他十分

为难，于是他在书上描述这个怪物说："不管我的良心会受到多么大的责备，事实上 $5+\sqrt{-15}$ 乘以 $5-\sqrt{-15}$ 刚好是 40！"于是他说："算术就是这样神妙地搞下去的，它的目标，正如常言所说，是又精致又不中用的。"

1629 年，荷兰的吉拉尔在《代数新发明》中说："有人可以说这些不可能的根(复数根)有什么用？我回答：它有三方面的用处——一是它能满足一般法则，二是它们有用，并且方程除此之外没有别的解。"

笛卡儿也摒弃复根，并造出"虚数"这个词．他在《几何》中说："真的和假的根并不总是实在的；它们有时是虚的．"他的实际论点是，负根可以通过变换方程而使之为正，但复根做不到．所以这些根不是实的而是虚的，它们不是数．

甚至连牛顿也不认为复根是有意义的，理由是它们缺乏物理意义．

对复数在很长一段时间内没有正确的认识，这一状况可以从莱布尼茨的一段话中看出："圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的征兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚数的 -1 的平方根．"

复数为人们所接受的关键是复数及复数的代数运算获得了几何解释．挪威出生的测量员韦塞尔(C. Wessel，1745—1818)和瑞士人阿尔冈(R. Argand，1768—1822)分别给出了复数和复数的代数运算的几何解释．我们现在用的基本上是阿尔冈的方法．

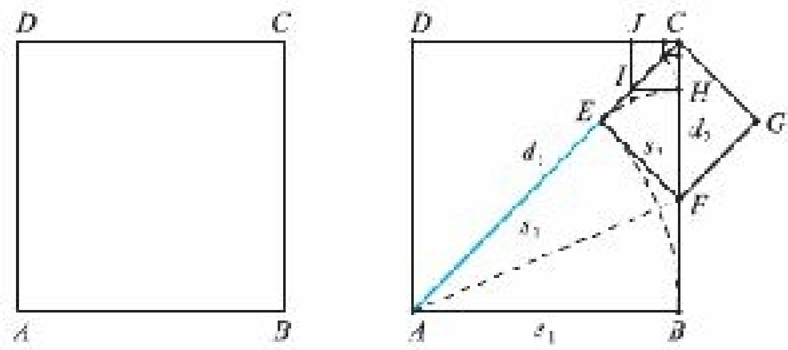
在使人们接受复数方面，高斯作出了实质性的贡献．在代数基本定理的几个证明中他使用了复数，在数论中也使用了复数．在有关论文中，他阐述了复数的几何加法和乘法，并指出，在这个几何表示中，人们可以看到"复数的直观意义已完全建立起来，并且不需要增加什么就可以在算术领域中采用这些量"．这样一来，几何表示使人们对虚数有了一个全新的看法．高斯引进"复数"一词代替虚数，这就是我们现在通用的术语．

习题 2—2

1. 阅读以下材料，比较"$\sqrt{2}$是无理数"的代数证明与下面的几何证明，谈谈你对不可公度的体会。

正方形的对角线与边不可公度的几何证明。

证明的基本思想是，从任一个正方形（如图(1)所示）开始，我们可以构造一系列正方形，其中一个比一个小。



(1)　　(2)

（第1题）

如图(2)所示，在正方形 $ABCD$ 中，令 $AB=s_1$，$AC=d_1$。在对角线 AC 上，截取 $AE=s_1$。再作线段 EF 垂直 AC 于 E，并交 BC 于 F，容易证明

$$\triangle BAF \cong \triangle EAF,$$

因此，根据全等三角形对应边相等，我们有 $EF=FB$。在 $Rt\triangle FEC$ 中，$\angle ECF=45°$，从而 $\triangle FEC$ 是等腰三角形，自然有 $CE=FE$。

接着，我们构造第二个正方形 $CEFG$，它以 $s_2=CE=d_1-s_1$ 为边，以 $d_2=CB-FB=s_1-s_2$ 为对角线。

这个过程可以永远重复下去，得到一系列越来越小的正方形，它们的边和对角线满足关系式：

$$s_n=d_{n-1}-s_{n-1},\quad d_n=s_{n-1}-s_n.$$

几何构造过程已经结束，现在证明正方形的边和对角线是不可公度的。仍用反证法。如果它们是可公度的，则一定存在一个更小的线段 δ，使得

$$s_1=m_1\delta,\quad d_1=n_1\delta,$$

于是，

$$s_2=d_1-s_1=(n_1-m_1)\delta=m_2\delta,$$

$$d_2=s_1-s_2=(m_1-m_2)\delta=n_2\delta,$$

这里 $m_2<m_1$，$n_2<n_1$。重复这个过程，就得到

$$1\leqslant\cdots<m_3<m_2<m_1,\quad 1\leqslant\cdots<n_3<n_2<n_1.$$

现在我们得到了矛盾的结果。因为比 m_1 和 n_1 小的正整数只有有限个，这与几何构造过程的无限性相矛盾。

这说明$\sqrt{2}$不能表示成整数或两个整数的比。毕达哥拉斯学派关于宇宙万物皆依赖于整数的信条，由于不可公度量的发现而受到了动摇。据柏拉图记载，后来又发现了除$\sqrt{2}$以外的其他一些无理数。这些"怪物"深深地困惑着古希腊的数学家，希腊数学中出现的这一逻辑困难，引发了"第一次"数学危机。数学基础的第一次危机是数学史上的一个里程碑，它的产生和克服都有重要的意义。

为了计算和度量的需要，人们不得不接受存在无理数这样一个事实，但仍然心存疑虑．施蒂费尔在他的重要著作《整数计算》中说：“在证明几何图形的问题中，由于当有理数不行而代之以无理数时，就能完全证出有理数所不能证明的结果……因此我们感到不能不承认它们确实是数，迫使我们承认的是由于使用它们而得出的结果　那是我们认为真实、可靠而且恒定的结果．但从另一面讲，别的考虑迫使我们不承认无理数是什么数．例如，当我们想把它们数出来（用十进小数表示）时……就发现它们无止境地往远跑，因而没有一个无理数是能被我们真正掌握住的……而本身缺乏准确性的东西就不能称其为真正的数……所以，正如无穷大的数并非数一样，无理数也不是一个真正的数，而是隐藏在一种无穷迷雾后面的东西．”

无理数的逻辑基础晚到19世纪末才建立．

2．搜集有关复数的资料，谈谈实数与复数的异同（这个问题可以在学习复数之后回答）．

3．谈谈“0”的作用．

§3 数学符号

在学习代数时，我们会明显地感到它与几何学不同，代数是一门高度符号化的学科. 在代数中充满了各种符号，例如，加号、减号、乘号、除号、等号以及表示未知量的 x，y，z，表示已知量的 a，b，c，等等. 但是，很少有人知道，这些符号表示法只有 400 多年的历史，实际上大多数符号的出现还不到 400 年.

代数符号进化的过程经历了 3 个阶段：文字阶段、简写阶段和符号阶段.

一、文字阶段

第一个阶段是文字表示的代数学，在叙述代数问题的解法时，完全使用文字叙述，而没有任何简写和符号. 我们举一个古埃及的例子.

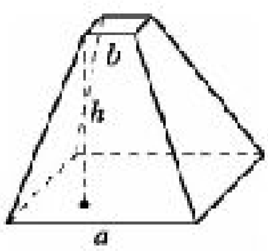


图 2-2

这是古埃及数学最光辉的成就之一，他们给出了以两个正方形为底的棱台的体积公式

$$V=\frac{1}{3}h(a^2+ab-b^2),$$

其中 a，b 分别是上、下底两个正方形的边长，h 是棱台的高，如图 2-2 所示.

这个解法出现在“莫斯科草卷”中. 原文是这样的：“如果告诉你，一个截顶金字塔垂直高度为 6 腕尺（古埃及的长度单位，由肘至中指尖的长度，约 18～22 英寸），底面每边长 4 腕尺，顶面每边长 2 腕尺. 4 的平方得 16，4 的两倍为 8，2 的平方是 4，把 16，8，4 加起来得 28，取 6 的三分之一得 2，取 28 的两倍为 56. 这个 56 正好是你要求的体积.”这是一个典型的用文字叙述的解题过程.

二、简写阶段

简写阶段出现在丢番图时代. 可以说，在丢番图以前，一切代数学都是用文字表示的. 丢番图对代数学发展的巨大贡献之一，就是简写了希腊代数学. 在丢番图的著作《算术》一书中，我们可以看到一批简写符号：未知数、未知数的一次到六次的幂、相减、相等、倒数等. 例如，“未知数的平方”由“Δ^r”来表示，“未知数的立方”由“K^r”来表示. 这样，文字表示的代数学转变为简写的代数学，这是数学史上的一个

里程碑.

中国和印度也出现了简写的代数学.在李冶的著作中出现了“天元术”.天元表示未知数,相当于现在的 x.天元术很快被推广为“四元术”.“四元术”就是以天、地、人、物 4 字作为元,分别代表 4 个未知数,相当于现在的 x,y,z,u.

三、符号阶段

16 世纪,科学的迅速发展,要求数学能更简洁地表示各种规律,由此促进了符号体系的发展和完善.引进符号体系是代数学的一个根本性的进步.事实上,由于建立了完善的符号体系,才使代数学成为一门科学.

1489 年,在维德曼(J. Widman,1462—1498)出版的一部算术书中,第一次使用了加号“+”和减号“−”.当时用来表示箱子质量的超、亏,后来为数学家所袭用.“=”号是 1557 年雷科德(Robert Recorde,1510—1558)引入的,他解释说:“因为没有任何别的事物比这两个线段更相同的了.”

在这里,我们把部分数学符号、表示法、使用的情况列成一个表,以供参考:

运算与关系	符号	使用者	时间
方根	R	Fibonacci(意大利)	1202 年
加,减	p,m	L. Pacioli(意大利)	1494 年
加,减	+,−	J. Widman(德国)	1489 年
减	--	W. Oughtred(英国)	1631 年
等于	=	R. Recorde(英国)	1557 年
等于	~	Viète(法国)	1591 年
等于	∝	Descartes(法国)	1637 年
乘	×	W. Oughtred	1631 年
乘	·	W. Oughtred	1631 年
比例	:	W. Oughtred	1631 年
除	÷	J. H. Rahn(瑞士)	1659 年
大于,小于	>,<	T. Harriot(英国)	16 世纪
根号	$\sqrt{\ }$	C. Rudolff(奥地利)	16 世纪
根号	$\sqrt[3]{\ }$	A. Girard(荷兰)	16 世纪
乘幂	a^n	N. Chuquet(法国)	1484 年
指数 a^3	aaa	T. Harriot(英国)	16 世纪

续表

运算与关系	符号	使用者	时间
指数 a^3	a^3	P. Herigone(法国)	1634 年
指数 a^3	a^3	Descartes(法国)	1637 年
已知数 未知数	$a,b,c,\cdots$ $x,y,z,\cdots$	Descartes(法国)	1637 年
虚数单位 $\sqrt{-1}$	i	Euler	1777 年
圆周率	π	Euler	1737 年
积分符号	$\int$	Leibniz(德国)	1675 年
微分符号	dx	Leibniz	1675 年

韦达是第一个有意识地、系统地使用字母的人．他不仅用字母表示未知量和未知量的乘幂，而且用来表示一般的系数．他通常用辅音字母表示已知量，用元音字母表示未知量．

韦达规定了算术和代数的分界．他说，代数是施行于"事物的类"或"形式"的运算方法，而算术仅仅是同"数"打交道的．这样代数就成为研究一般"类"的运算和方程的学问．

笛卡儿改进了韦达的方法，他用字母表中前面的字母表示已知量，用后面的字母表示未知量，这已成为现在的习惯用法．

莱布尼茨的名字在符号史上是必须提到的．他对各种记法进行了长期研究，试用过一些符号，征求过别人的意见，然后选取他认为最好的符号．他清楚地认识到，好的符号可以大大地节省脑力劳动．

欧拉对数学的符号化也作出了重大贡献．他采用 $y=f(x)$ 作为函数的符号，用 e 表示自然对数的底，用 Σ 作为级数中的求和号，用 i 表示虚数单位 $\sqrt{-1}$．

好的符号在数学中扮演着重要的角色．克莱因说："利用数学符号常常给发明它们的数学家们带来很大的方便．"赫兹说："数学公式有其自身的独立存在性与智慧，它们比我们聪明，并且我们从它们得到的比原来注入的要多．"

习题 2—3

1．搜集和整理关于"0"的产生过程，体会数学符号的作用．

2．请用文字叙述公式 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，体会符号给我们带来的好处．

复习题二

1. 结合自己的学习和数的发展历史，体会在数和运算的拓展中反映的数学思想.
2. 列举学过的所有数学符号，给出恰当的分类原则，整理这些符号，体会这些数学符号与所学过的数学之间的关系.

第三章 几何学发展史

数学研究的对象包含两个最基本部分：数和形. 数是算术和代数的研究对象，形是几何学的研究对象. 数和形的交响曲构成了数学发展史的主旋律.

形是无处不在的，太阳、地球、月球和我们自身都是一种几何形体. 数也是无处不在的，因为任何文明想取得科学上的进步，都需要大量关于数的信息. 但是在数学史上，数的学问和形的学问并不是肩并肩地前进，而是交替前进，时而数的发展领先，时而形的发展领先.

如何研究大自然中丰富多彩的“形”和人为创造的各式各样的“形”呢？人们从观察和实验开始，从简单到复杂、从具体到抽象、从整体到局部、从局部到整体；不断地积累几何学的知识，不断地整理零散的、孤立的知识，不断地构建一个又一个的几何学理论体系，不断地发掘几何学与其他学科的联系和实际应用. 到今天，几何学已经是一个大的学科，其中包含绚丽多彩的各个分支.

§1 从经验几何到演绎几何

一、归纳与经验的几何学

最初的一些几何概念和知识要追溯到史前时期，它们是在实践活动的进程中产生的. 大自然为人们提供了丰富多彩的几何形体：太阳和月亮的形状提供了圆形；湖、海的水平面提供了平面的雏形；光线提供了直线的原形. 当然，自然界很少看到十分直的线，也没有理想的三角形和正方形.

关于几何量的概念——长度、面积和体积——也同样是在实践活动的进程中产生的. 对农民来说，为了估计播种面积和预计收成，知道这样一些几何关系是很重要的. 例如，长方形的面积等于它的两边的乘积.

随着几何知识的积累，人们能够从一些具体的几何关系归纳出带

有一般性的几何定律或公式.但是在很长的一个历史时期,几何都没有形成一个理论体系,这和几何学称为归纳与经验的几何学.古代中国和埃及的几何学都属于这一范畴.

下面,我们通过实例说明这一时期几何学的成果.

1. 弓形面积的计算

在《九章算术》中包含面积计算问题,其中之一是计算弓形的面积.

问题　如图3-1所示,用c表示弓形的弦PQ的长度,用s表示弓形的高OD的长度,求弓形PDQ的面积.

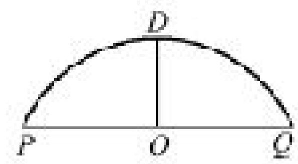


图3-1

解　如图3-2所示,延长弦PQ,使$PE=QF=\frac{s}{2}$,并作$\triangle EDF$.《九章算术》中认为,可用$\triangle EDF$的面积替代弓形的面积.$\triangle EDF$的面积是$\frac{s}{2}(c+s)$,所以弓形的面积也是$\frac{s}{2}(c+s)$.

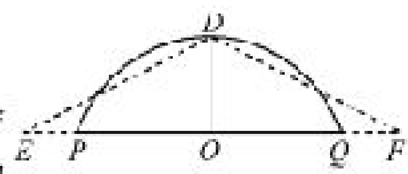


图3-2

应当指出,这个公式只是近似公式.把这个公式应用于半圆就会发现,这个公式相当于取$\pi=3$.在《九章算术》中计算球的体积时,π的取值也是3.

在《九章算术》中,PQ称为弦,而弓形的高OD称为矢.原文是这样的:

"今有弧田,弦长30步,矢15步,问为田几何?术曰:以弦乘矢,矢又自乘,并之,二而一."

2. 棱台的体积公式

西方数学起源于古埃及和古巴比伦.数学史家通常将古埃及视为几何学的故乡,把古巴比伦视为代数的故乡.历史留给我们的往往是残缺的断片,要想由此重建它的真正姿态,那是非常困难的,甚至是不可能的.尽管如此,历史还是给我们留下了丰富的遗产.例如,前面第二章§3数学符号中我们已经介绍了埃及数学最光辉的成就之一,他们给出了以两个正方形为底的棱台的体积公式.

二、演绎数学的发祥

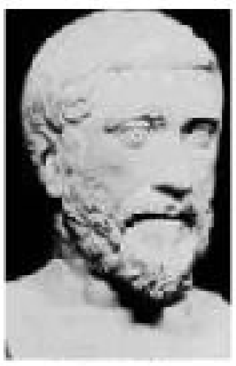
公元前7世纪,几何学从古埃及传到了古希腊.在古希腊人手里,几何学发生了质的变化.

古希腊第一个哲学家和数学家是米利都的泰勒斯(Thales,约公元前625—公元前547),被他的同时代人尊为"希腊七贤"之一.他曾到埃及旅游,并把埃及的数学知识传到希腊.通过波斯,他也受到印度数学思想的影响.泰勒斯向几何学的系统化迈出了第一步.他是第一个提出"知其然",同时还要"知其所以然"的学者.他被公认为论证数学之父.他极力主张,对几何学的陈述不能凭直觉上的貌似合理就予

以接受，相反，必须要经过严密的逻辑证明.他对几何学作出了巨大贡献.传说他第一个证明了下列几何性质：

1. 一个圆被它的一个直径所平分.
2. 三角形内角和等于两直角之和.
3. 等腰三角形的两个底角相等.
4. 半圆上的圆周角是直角.
5. 对顶角相等.
6. 全等三角形的角—边—角定理.

这些定理是古埃及人和古巴比伦人都已经知道的，泰勒斯不是第一个发现这些定理的人，但他是第一个证明这些定理的人.这就是“前希腊数学”与“希腊数学”的本质区别.这样，演绎数学就在希腊诞生了.



毕达哥拉斯

三、毕达哥拉斯学派

据说，毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前580—公元前500)曾就学于泰勒斯，他接过学术的火炬，在意大利南部希腊的一个居留地成立了自己的学派.对数学概念的抽象研究应归功于毕达哥拉斯学派，他们把数学变成了一门高尚的艺术.最著名的结果是勾股定理，在西方，这个定理叫作毕达哥拉斯定理.这是欧氏几何中最重要的定理.这个定理对于古埃及和古巴比伦人早就知道，毕达哥拉斯学派的功绩在于他们证明了这个定理.此外，关于三角形、平行线、多边形、圆、球和正多面体的一些定理也是毕达哥拉斯学派发现的.特别是，他们知道三角形的三个内角和是180°.

四、几何作图三大难题

古希腊人在几何学上提出著名的三大作图问题，它们是：

1. 三等分任意角.
2. 化圆为方：求作一正方形，使其面积等于一已知圆的面积.
3. 立方倍积：求作一立方体，使其体积是已知立方体体积的两倍.

解决这三个问题的限制是，只能使用没有刻度的直尺和圆规，并在有限次内完成.这三个问题都是不可能解的.历史上许多学者为了这三个问题花费了无数的时光，这三个问题的不可解性到了19世纪末，才得以全部被证明.可是今天仍然有人去盲目地寻求解答，这是徒劳的.有兴趣的同学可以参考专题课程《三等分角与数域扩充》.

五、柏拉图学派

柏拉图(Plato，公元前427—公元前347)是他那个时代最有学问

的人，但他不是数学家．大约公元前 387 年他在雅典成立学院，这个学院很像现在的大学．几乎所有公元前 4 世纪的重要数学著作都是柏拉图的朋友和学生写的．他在数学上的影响不是由于他在数学上作出的成就，而是由于他深信，从事数学研究能培养人的思维能力．他的学院门口写着他的著名格言：

不懂几何者不得入内．

柏拉图对几何的贡献是在几何学的系统和基础方面．他认为，科学的任务是发现自然界的结构，并把它在演绎体系里表述出来．他开始把几何学建立在定义、公理的演绎基础上．但是他没有专心于几何学，所以数学著作不多．他的工作后来由欧几里得完成．

六、欧几里得

关于欧几里得的生平，人们知之甚少，甚至连他的出生年月和出生地点都不知道．但却留下了两个耐人寻味的故事．

当国王托勒密向欧几里得询问学习几何学的捷径时，他答道："在几何学中没有王者之路．"

当一个学生问他，学了这门课会得到什么好处？他便命令一个奴隶给这个学生 3 个钱币，并说："因为他总想在学习中获取实利．"

欧几里得曾在柏拉图学院受过教育，后来移居亚历山大城从事教学活动．他把亚里士多德的逻辑、结构、证明和推理的严密性应用到数学中．欧几里得至少有 10 部著作，其中 5 部被相当完整地保存了下来，但是，使他名垂不朽的是《原本》．欧几里得的《原本》的出现是数学史上的一个伟大的里程碑．它是古希腊数学成果、方法、思想和精神的结晶．它是数学史上第一个逻辑结构严谨、体系宏伟的演绎系统，是数学知识系统化的开端，对后世数学、科学的发展起了不可估量的示范作用．从它刚问世起就受到人们的高度重视．自 1482 年第一个印刷本出版以后，至今已有一千多种版本．

七、《原本》

《原本》共 13 卷．第一、二、三、四、六卷是关于平面几何的；第一卷包含三角形相等的条件、三角形的边和角的关系、平行线的理论和三角形以及多边形等积的条件；在第二卷里给出了如何把三角形变成等积的正方形；第三卷讲的是圆．第四卷里讨论圆内接与外切多边形．第六卷论述相似多边形；第五、第七、第八、第九和第十卷讲述比例和算术理论（用几何方式叙述）；在最后 3 卷里讲述立体几何．

这部书的材料大部分是前人积累的数学成就，证明方法也基本上是前人给出的．在《原本》中，有一些工作是欧几里得完成的，他完善了

前人所做的一些不严格的证明．但是，他最伟大的贡献是把前人的数学成就按照严格的逻辑体系进行整理排列，形成历史巨著．即使在现在，《原本》仍然是一部非常好的教科书．

八、《原本》到中国

在我国明朝时期，意大利传教士利玛窦（Matteo Ricci，1552—1610）与我国数学家徐光启（1562—1633）合译了《原本》前 6 卷，并于 1607 年出版．中译本书名为《几何原本》．徐光启对这部著作给予高度评价．他说：

“此书有四不必：不必疑，不必揣，不必试，不必改．有四不可得：欲脱之不可得，欲驳之不可得，欲减之不可得，欲前后更置之不可得．有三至三能：似至晦，实至明，故能以其明明他物之至晦；似至繁，实至简，故能以其简简他物之至繁；似至难，实至易，故能以其易易他物之至难．易生于简，简生于明，综其妙在明而已．”

在翻译过程中，徐光启精心研究、反复推敲，使许多数学译名都非常恰当．例如，“几何”一词的选用，又如，点、直线、平行线、角、三角形、四边形、有理数、无理数等名词，都是这个译本中首先使用的．在我国一直沿用至今，而且影响到日本和朝鲜．

1847 年，李善兰把《原本》的后 7 卷译完．

徐光启已洞察到《原本》的重大教育意义．他说：

“此书为益，能令学理者祛其浮气，练其精心；学事者资其定法，发其巧思，故举世无一人不当学．”

这就指出，在科学思维系统训练方面，《原本》有着重要的作用．

九、欧氏几何要义

我们来分析一下这本书的精华所在．《原本》中包含 4 种不同的概念：

1. 定义

这是几何学中使用的术语．例如，点的定义：点只有位置而没有大小，且不能被分割．

2. 公理

指不证自明的真理．例如，传递公理：与同一个东西相等的东西，彼此也相等．

3. 公设

在几何学中，假设其成立的事实，并获得公认．例如，线段公设：给定两点，可连接一线段．

4. 命题

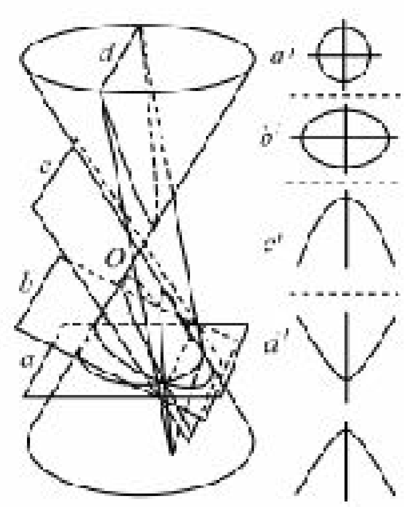
命题又分为两部分：

(1)作图题.由几何学里的已知对象作出所求的对象.例如，作图题：求作已知角的角平分线.

(2)定理.由定义、公设、公理利用逻辑严格推导出来的结论.例如，定理：如果一个三角形的两边相等，则两底角相等.

十、圆锥曲线

欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯是公元前3世纪的3个数学巨人.阿波罗尼奥斯比阿基米德约小25岁，大约于公元前262年生于小亚细亚的城市珀加.年轻时到亚历山大里亚城，从师于欧几里得.嗣后，他定居于亚历山大里亚城，并与当地的数学家们合作研究.在解决三大难题的过程中，希腊人发现了圆锥曲线.阿波罗尼奥斯总其大成，写了《圆锥曲线论》.这是古希腊演绎几何的最高成就.他除了综合前人的成就之外，自己也做了许多创造性的工作，他给出的一些证明巧妙、灵活，整本书组织得十分出色.《圆锥曲线论》是继《原本》之后又一本数学巨著.以致后代学者几乎不能再对这个问题有新的发言权.这确实是古典希腊几何的登峰造极之作.



阿波罗尼奥斯是第一个依据同一个圆锥(正的或斜的)的截面来研究圆锥曲线理论的人.他也是发现双曲线有两个分支的人.ellipse(椭圆)、parabola(抛物线)和hyperbola(双曲线)这些名词也是阿波罗尼奥斯叛出来的.

习 题 3—1

1. 根据自己学习几何知识的过程，体会经验几何与论证几何的联系.
2. 搜集有关欧几里得《原本》的资料，体会《原本》所反映的逻辑体系.
3. 思考已学过的数学知识的逻辑体系.

§2　投影画与射影几何

一、新的时代、新的艺术

在西方世界，古希腊人已经在艺术和数学之间建立了密切的联系，因为数学和艺术是构成他们世界观的主要部分. 但是，在宗教统治的中世纪，这种观点被抛弃了. 直至文艺复兴时期，重新唤起了人们对艺术和数学的渴望，唤起了人性的觉醒，人们重新恢复了对大自然的兴趣，渴望描述真实的世界，数学成为了反映世界和描述艺术的工具. 那个时期，艺术家都是工程师和建筑师，他们具有良好的数学基础，可以说他们本身就是数学家.

描述三维真实世界的愿望使画家们创造了透视学和绘画的科学. 在二维画布上可以描绘出深度和体积. 绘画科学是由布鲁内莱斯基(Brunelleschi，1377—1446)创立的，他建立了一个透视体系. 将透视画法系统化是由阿尔贝蒂(Alberti leon Battista，1404—1472)完成的. 他的《绘画》一书于 1435 年出版. 在这本论著中，他指出，做一个合格的画家首先要精通几何学. 他认为，借助数学的帮助，自然界将变得更加迷人. 阿尔贝蒂的重要功绩是：大量地应用了欧几里得几何学的原理，抓住了透视学的关键，提出了“没影点”的思想.

为了对透视体系有所了解，我们来看一幅典型化了的绘画，这是一个过道，如图 3-3 所示. 直线 AA'，BB'，CC'，DD' 等在实物中是平行的，但是在画中不再平行. 它们相交于一点 P，这个点叫主没影点. 这样，我们就得到了透视学的第一原理：

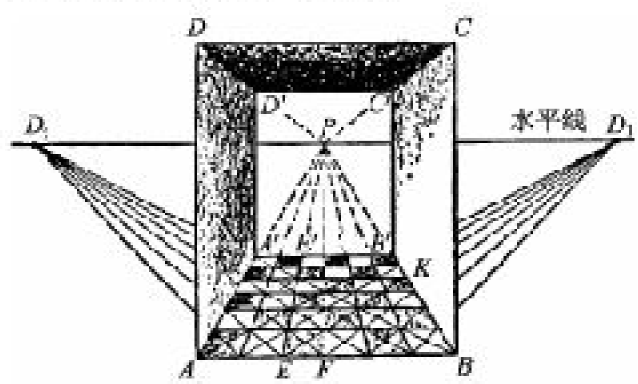
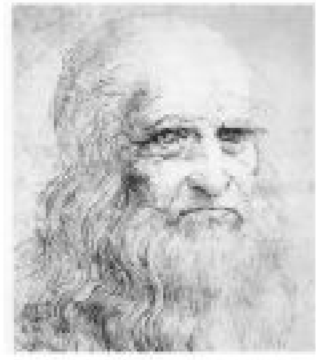


图 3-3

当我们把画布悬挂在墙上时，景物中所有与画布垂直的水平线在画布上相交于一点，此点称为主没影点.

透视学有着丰富的内容，有兴趣的同学可以阅读相关的书籍.

二、完美的结合、艺术的顶峰



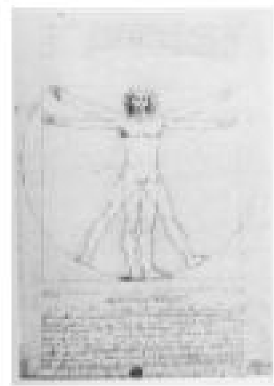
达・芬奇

对透视学作出最大贡献的是艺术家列奥纳多・达・芬奇(Leonardo da Vinci，1452—1519.5.2).他对待透视学的态度可以从他的著作《艺术专论》(Trattato della Pittura)看出来.他有一句名言概括了他的艺术哲学思想：

“欣赏我的作品的人，没有一个不是数学家.”

达・芬奇坚持认为，绘画的目的是再现自然界，而绘画的价值在于精确地再现.因此，绘画是一门科学，和其他科学一样，其基础是数学.他指出：

“任何人类的探究活动都不能成为科学，除非这种活动通过数学的表达方式和经过数学证明为自己开辟道路.”

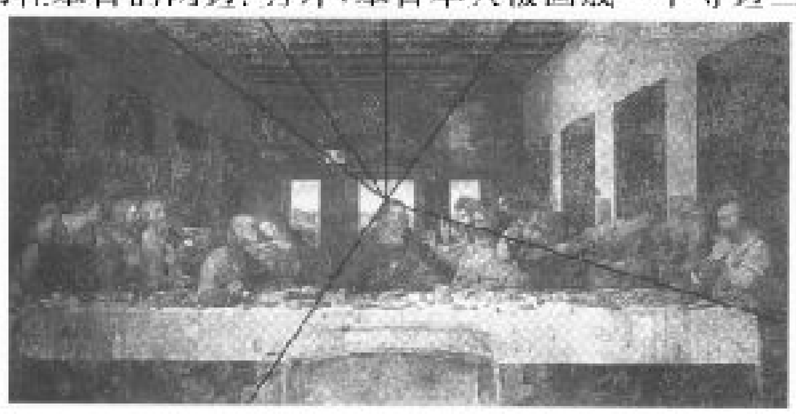


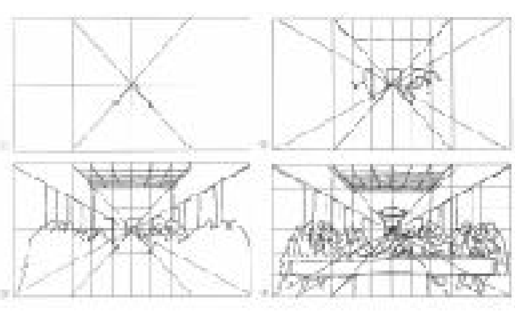
达・芬奇：人像比例

15 世纪和 16 世纪早期，几乎所有的绘画大师都试图在其绘画中体现透视学的原理，他们努力将真实世界与数学原理、数学和谐有机地结合起来.米开朗琪罗(Michelangelo，1475—1564)、拉斐尔(Raffaello Sanzio，1483—1520)以及其他许多艺术家都对数学有浓厚的兴趣，而且力图将数学应用于艺术.他们利用高超而惊人的技巧和缩距法精心创作了难度极大、风格迥异的艺术品.他们有时将技法的处理置于情感之上.这些大师们意识到，艺术创作尽管利用的是独特的想像，但它应受到规律的约束.

达・芬奇创作了许多精美的透视学作品.这位真正富有科学思想和绝伦技术的天才，对每幅作品他都进行过大量的精密研究.他的每一部杰作都是透视学的典范.

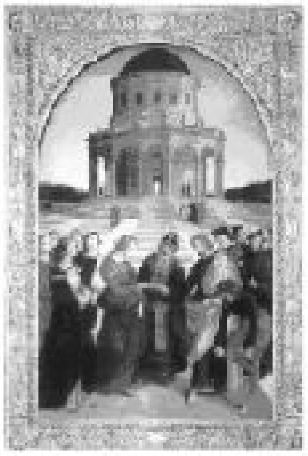
《最后的晚餐》给我们描绘出了真实的情景.人们会觉得达・芬奇就在画中的房子里.墙、楼板和天花板上后退的光线不仅清晰地衬托出了景深，而且经仔细选择的光线汇集在基督头上，使人们将注意力集中于基督，作品的真实感和神圣感得到了最好的体现.作品成功的另一个原因是布局设计合理，12 个门徒分成 4 组，每组 3 人，对称地分布在基督的两边.另外，基督本人被画成一个等边三角形，这样的描





达・芬奇：最后的晚餐

绘目的在于，表达基督的情感和思考，并且身体处于一种平衡状态，这幅画可谓艺术中的珍品.



圣母的婚礼

拉斐尔在他的第一幅创作《圣母的婚礼》中就成功地运用了几何构图和透视法. 他在画面的布置方面向前迈了一大步，不仅把画中人物融入空间，也使观赏者参与进去. 分列在约瑟、马利亚和神父左右两侧的贵族和贵妇排成一个开阔的圆弧，弧形向观赏者围伸过来，把观赏者也圈进作品，巧妙地使之成为隐形的画中人，实在令人称奇.

三、从艺术中诞生的科学——射影几何

画家们在发展聚焦透视体系的过程中引入了新的几何思想，并促进了数学的一个全新方向的发展，这就是射影几何.

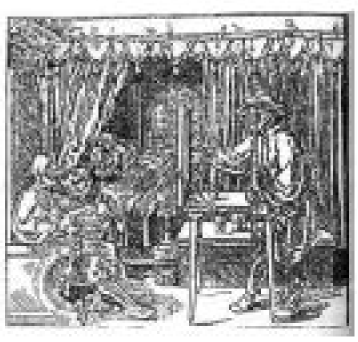
射影几何的诞生必须提到这样几位人物.

首先，是数学透视学的天才阿尔贝蒂（L. B. Alberti，1404—1472），他不仅提出了投影线、截影等概念，还阐述了截影的数学性质.

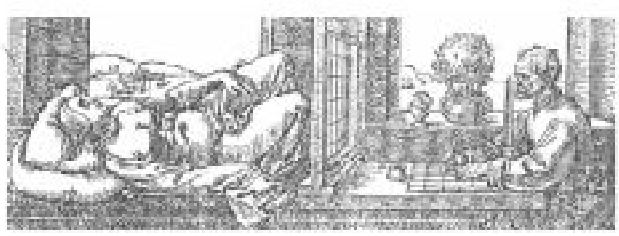
其次，就是自学成才的德沙格（G. Desargues，1591—1661），他提出了许多创造性的思想，包括为平行线引入无穷远点，进而引出无穷远线的概念.

帕斯卡（B. Pascal，1623—1662）同样也为射影几何的诞生作出了不朽的贡献.

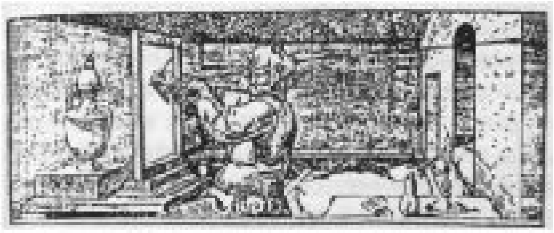
在透视学方面最有影响的艺术家是丢勒（Albrecht Durer，1471.5.21—1528.4.6），他是文艺复兴时期德国最重要的油画家、版画家、装饰设计家，同时也是工程师、科学家和数学家. 他的人文主义思想使他的艺术具有知识和理性的特点. 他从意大利的大师们那里学到了透视学原理，然后回到德国继续进行研究. 他认为，创作一幅画不应该信手涂抹，而应该根据数学原理构图. 实际上，文艺复兴时期的画家们并没有能完全自觉地应用透视学原理.



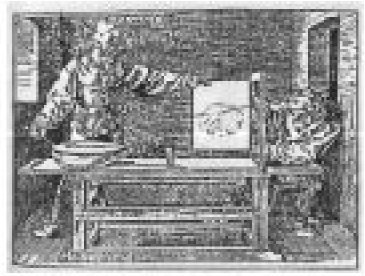
丢勒：为坐着的男人画像



丢勒：为躺着的妇人画像



丢勒:画罐



丢勒:画琵琶

下面,我们通过阿尔贝蒂、达·芬奇和丢勒的术语对艺术家们所发展的数学体系作一个解释.这个解释十分生动直观地反映了射影几何的思想.他们将画布想像为一玻璃屏板,艺术家们通过它看到所要画的景物,如同我们透过窗户看到户外的景物一样.从一只固定不变的眼睛出发,设想目光可以投射到景物的每一个点上,这种目光称为投影线.投影线与玻璃屏板交点的集合称为一个**截影**.截影给眼睛的印象与景物自身产生的效果一样.实际上,一幅画就是投影线的一个截影.

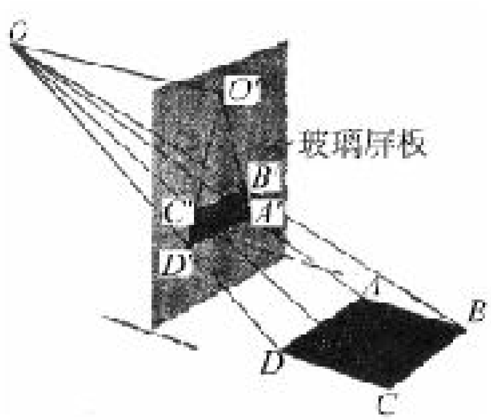
射影几何的诞生为几何的发展注入了新的活力,引入了新的几何观点和思想.

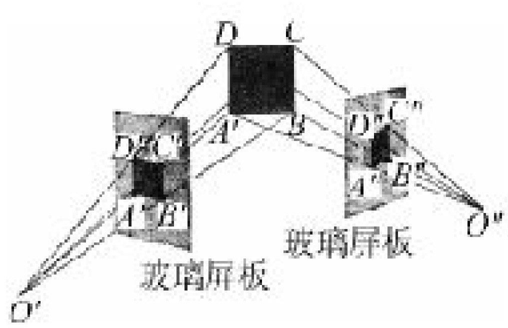
第一个思想是,应该有两种几何,一种是触觉几何,一种是视觉几何.

欧氏几何是触觉几何,与我们的触觉一致,但与我们的视觉并不总一致.人用手摸到的世界和用眼睛看到的世界并不是一回事.例如,欧几里得的平行线只有用手摸才存在,用眼睛看它并不存在,铁轨是平行的,但是看上去它们在远处某一点相交,就是一个很好的例子.

第二个重要思想是投影和截影原理.

人眼被看作一个固定的点,由此出发来观察景物.景物上的每一点反射出的光线到达人眼形成了一个投影锥,用一个平面来截这个投影锥,这时平面与投影锥相截所形成的图形就是所谓的截影.根据这一原理,画面本身必须含有投影锥的一个截影.从数学上看,截影就是一张平面与投影锥相截的一部分截面.





设人眼在 O 处,今从 O 点观察平面上的一个矩形 $ABCD$.从 O 到矩形的四个边上各点的连线形成一个投影棱锥,其中 OA,OB,OC 及

OD 是四根棱线. 现在在人眼和矩形之间插入一平面, 并在其上画出截影四边形 $A'B'C'D'$. 由于截影对人眼产生的视觉印象与原矩形一样, 所以人们自然要问: 截影与原矩形有什么共同的性质? 我们知道截影与原矩形既不重合, 也不相似, 它们也没有相同的面积, 甚至截影连矩形也不是.

把问题提得更一般一些: 设有两个不同平面以任意角度与这个投影锥相截, 得到两个不同的截影, 那么, 这两个截影有什么共同性质呢?

这个问题还可以进一步推广. 设有矩形 $ABCD$, 今从两个不同的点 O' 和 O'' 来观察它. 这时会出现两个不同的投影锥. 在每个锥里各取一个截影, 这两个截影有什么共同性质呢? 如果每个截影都与原矩形有某些共同的几何性质, 那么这两个截影间也应有某些共同的几何性质.

17 世纪的数学家们开始寻找这些问题的答案. 他们把所得到的方法和结果都看成欧氏几何的一部分. 诚然, 这些方法和结果大大丰富了欧几里得几何的内容, 但其本身却是几何学的一个新的分支, 到了 19 世纪, 人们把几何学的这一分支叫作射影几何学.

射影几何集中表现了投影和截影的思想, 论述了同一射影下, 一个物体的不同截影所形成的几何图形的共同性质, 以及同一物体在不同射影下截影的几何图形的共同性质. 这门"诞生于艺术的科学", 今天成了最美的数学分支之一.

习 题 3—2

仿照丢勒的方法, 利用射影几何的基本思想制作一幅画.

§3 解析几何

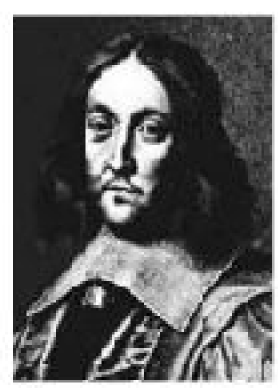
一、解析几何的诞生

在17世纪，数学科学发生了根本性的转折，这种转折实质上是由社会生产力的急速发展所导致的. 数学根本性的转折之一是解析几何的诞生.

解析几何的诞生不是偶然的，它是文艺复兴以来科学与生产发展的一个必然结果. 哥白尼的日心说的确立，开普勒天体运动三定律的发现，使人们知道，行星沿椭圆形轨道绕日运行. 火器的使用引起了对抛物体运动轨迹的研究. 望远镜与显微镜的发明推动了对镜片的研究. 大规模的地理探险需要准确的地图. 所有这些问题不仅增加了对已知曲线的性质的研究，而且还需要研究新的曲线.

解析几何的创始人是笛卡儿和费马. 他们都对欧氏几何的局限性表示不满：古代的几何过于抽象，过多地依赖于图形. 他们对代数也提出了批评，因为代数过于受法则和公式的约束，缺乏直观，不是有益于发展思想的艺术. 同时，他们都认识到几何学提供了有关真实世界的知识和真理，而代数学能用来对抽象的未知量进行推理，代数学是一门潜在的方法科学. 因此，把代数学和几何学中一切精华的东西结合起来，可以取长补短. 这样一来，一门新的科学诞生了.

笛卡儿的《方法论》出版于1637年6月8日，其中《几何学》是《方法论》的附录. 这一天就是解析几何的诞生日.


费马

二、运动进入了数学

笛卡儿把物质运动的概念作为自己科学的哲学基础，从而把运动带进了数学. 在笛卡儿之前，常量数学占主导地位，带有形而上学的性质，在笛卡儿之后，运动进入了数学和其他科学，带有辩证法的性质. 正如恩格斯所说的：

"数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学."

三、解析几何要义

笛卡儿的理论以两个思想为基础：一个是坐标思想；另一个是方

程与曲线的思想，即两个未知数表示的某个代数方程可以看成平面上的一条曲线，反之，一条曲线可以用曲线上任意点(x, y)坐标之间的方程关系来表示.

1. 坐标

在引进坐标系之后，平面上的点 P 可以与一对有序实数(a, b)之间建立一一对应关系：

$$P \leftrightarrow (a, b),$$

(a, b)称为该点的坐标(图 3-4).

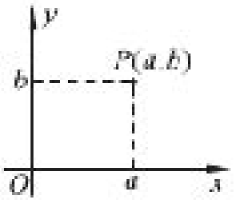


图 3-4

这实现了平面的算术化，实现了数学史上的一次质的飞跃.

2. 曲线与方程

下面我们通过一个具体例子来说明曲线与方程的思想.

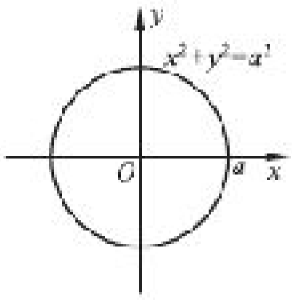


图 3-5

我们知道，在直角坐标系中，到原点距离为 a 的所有点构成了一条曲线，用圆规以原点为圆心，以 a 为半径，作出的圆就是这条曲线(图 3-5). 它可以用方程表示出来：$x^2+y^2=a^2$. 反之，反映未知数 x 与 y 之间关系的方程 $x^2+y^2=a^2$，表示的是一条到原点距离为 a 的点构成的曲线.

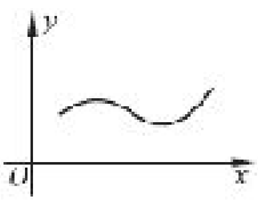


图 3-6

一般地，一个方程 $F(x, y)=0$ 表示平面上一条曲线；反过来平面上的一条曲线可以用一个方程 $F(x, y)=0$ 来表示(图 3-6).

上面的表述是现代的表述. 笛卡儿的《几何学》写得并不通俗. 他自己说：

“我不准备给出比较详细的叙述，因为那会使你们失去独立分析的愉快，会使你们的头脑失去在进行这种练习时所得到的好处. 这种好处依我看，是能够从这门科学中吸取到的主要好处.”

笛卡儿的《几何学》不仅对几何学的发展有重要的贡献，同时也促进了代数学的进一步发展. 笛卡儿给出的坐标方法，使我们有可能用分析的方法去解决一系列复杂的几何问题，后来牛顿把这个分支叫作解析几何.

四、解析几何的伟大意义

解析几何的意义可以简单地概括如下：

1. 数学的研究方向发生了一次重大转折：古代以几何为主导的数学转变为以代数和分析为主导的数学.

2. 以常量为主导的数学转变为以变量为主导的数学，为微积分的诞生奠定了基础.

3. 使代数和几何融合为一体，实现了几何图形的数字化，是数字化时代的先声.

4. 代数的几何化和几何的代数化，使人们摆脱了现实的束缚. 它

为人们认识更为广泛的新空间带来了可能，帮助人们从现实空间进入虚拟空间，从三维空间进入更高维的空间.

下面我们通过一个例子，体会解析几何中代数语言具有的意想不到的作用.

考虑方程 $x^2+y^2=25$，我们知道，它表示一个圆. 圆是最完美的图形之一，它具有很好的对称性. 从几何上说，(x,y) 与 $(x,-y)$ 关于 x 轴对称，(x,y) 与 $(-x,y)$ 关于 y 轴对称，(x,y) 与 $(-x,-y)$ 关于原点对称. 从代数上来说，只需要一句话：它们都满足同一个代数方程. 代数取代了几何，思想取代了眼睛！在这个代数方程的性质中，我们能够找出圆的所有几何性质. 从这个事实中，使得数学家们通过几何图形的代数表示能够探索出更深层次的数学思想. 什么是四维空间中的圆呢？在几何中很难想像，我们可以考虑方程：$x^2+y^2+z^2+w^2=25$，从代数上很容易看出，它拥有"三维空间中的圆"所具有的所有性质. 同样地，形如 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=25$ 的方程也具有相同的性质. 这是一个伟大的进步. 仅仅靠类比，就从二、三维空间进入高维空间，从有形进入无形，从现实世界走向虚拟世界. 这是何等奇妙的事情啊！

解析几何的诞生极大地促进了几何学的发展. 到目前为止，出现了一批形式不同的几何分支，例如，非欧几何（球面几何、罗巴切夫斯基几何、黎曼几何等）、微分几何、拓扑学、分形几何等.

习 题 3—3

1. 收集和整理高中数学中有关解析几何的资料，通过对具体实例的分析，体会解析几何的基本思想.
2. 举例说明，解析几何的思想在学习其他数学知识中的作用.

复习题三

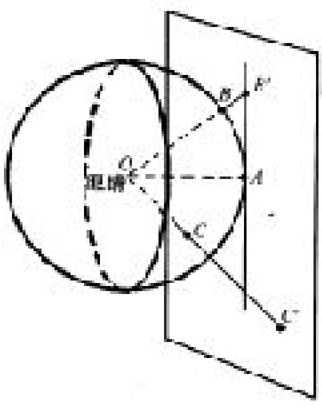
1. 阅读下面的材料，进一步体会射影几何的应用.

射影几何诞生于透视体系，是艺术家在利用投影和截面取景的思想的绘画创作中逐步建立和发展起来的. 但是透视体系在画家的创作中却发挥着理论指导作用，当时许多画家都以十分的热情试图使其作品数学化. 达·芬奇就是使用透视体系进行绘画的杰出代表. 达·芬奇在绘画创作过程中十分重视对数学的应用.

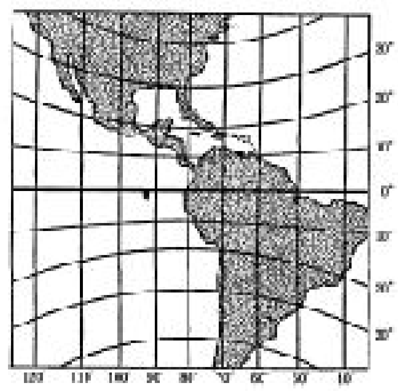
射影几何除了用于指导艺术家进行绘画创作之外，最大的一个应用就是制作地图. 地图的绘制原理就是把一个球面上的图形投影到一块平板上去，就是投影的截影. 这与透视学、射影几何的原理完全相同.

我们介绍两种制作地图的方法.

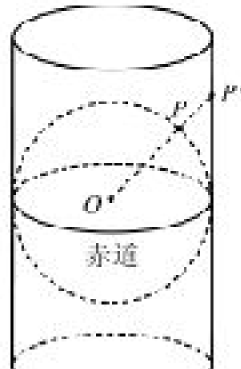
第一种方法是球心投影法. 这种方法是利用地球的投影的截影这一原理来制作的. 假设我们的眼睛位于地球的球心，而且正面向西半球看，每一条视线都一直穿过地球，直到与地球表面相切的平面上的一点，这样地球表面上的点就可以投到平面上. 于是，一个简单的地图就制作出来了.



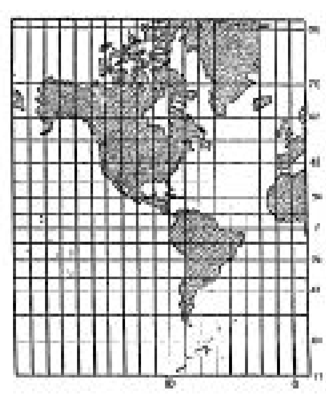
球心投影原理


西半球的球心投影地图

第二种方法是墨卡托投影法. 我们用透视柱面投影法来近似刻画这种投影法，就是假设地球包含在一个圆柱内且地球与圆柱相切于某个大圆，比如赤道. 从地心 O 引射线一直延伸到圆柱体上，这样球面上的点 P 就投影到了柱体上的 P' 点. 再将圆柱体沿一母线剪开，平铺，就制成了一张地图. 在这张地图上，地球上的纬线就变成了平行的水平线，而经线变成了与纬线相互垂直的平行线. 但是，值得注意的是，这张地图上没有南极和北极两点.



透视柱面投影原理


西半球的墨卡托投影法

2. 参考其他专题课程，例如《球面上的几何》《欧拉公式与闭曲面分类》等，体会这些几何分支与欧几里得几何的差异.

第四章 数学史上的丰碑——微积分

在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了.如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹的和唯一的功绩，那正是在这里.

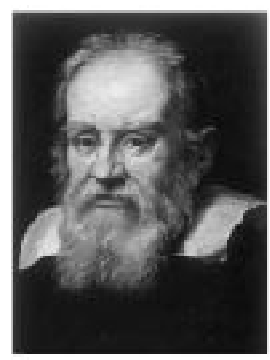
——恩格斯

§1 积分思想的渊源

祖冲之

一、积分发展的历史足迹

求积问题就是求图形的面积、体积问题.该问题的历史十分悠久，可以追溯到古代各个文明对一些简单图形进行的求面积和体积，比如求三角形、四边形、圆或球、圆柱、圆锥等的面积或体积，以及17世纪欧洲人对圆面积、球体积、曲边三角形、曲边四边形等的面积的计算.这些问题直到牛顿和莱布尼茨建立微积分后才从根本上得到了解决.求积问题是促使微积分产生的主要因素之一.



伽利略

在积分思想发展的过程中，一批伟大的数学家为此作出了杰出的贡献.

古希腊时代伟大的数学家、力学家阿基米德，我国古代著名数学家刘徽、祖冲之和祖暅父子等为积分思想的形成和发展作出了重要的贡献.

开普勒

16，17世纪是微积分思想发展最为活跃的时期，其杰出的代表有伽利略(Galileo Galilei，1564—1642，意大利天文学家、力学家、哲学家)，开普勒(J. Kepler，1571—1630，德国天文学家、数学家、物理学家和哲学家)，卡瓦列里(B. Cavalieri，1598—1647)等.他们的工作为牛顿、莱布尼茨创立微积分理论奠定了基础.

本节主要介绍我国古代数学家刘徽的工作.有关其他材料，见本节后面的阅读材料.

二、刘徽

刘徽

刘徽是我国古代最伟大的数学家之一，也是世界古代最伟大的数学家之一. 关于他的生平我们知之甚少，只是从《隋书·律历志》中得知. 刘徽是公元 3 世纪魏晋时人，于公元 263 年撰《九章算术注》. 刘徽的《九章算术注》不仅纠正了《九章算术》中的错误，整理了书中的各种解题思想体系，而且包含着他的许多创造性工作. 刘徽是中国古典数学理论的奠基者之一. 他的杰作《九章算术注》和《海岛算经》，是我国宝贵的数学遗产.

刘徽继承和发展了战国时期"名家"和"墨家"的思想，主张对一些数学名词特别是重要的数学概念给以严格的定义，认为对数学知识必须进行"析理"，才能使数学著作简明严密，利于读者的学习. 他还是我国最早明确主张用逻辑推理的方式来论证数学命题的人. 刘徽在数学理论上取得如此巨大的成就，除和他那个时代重视理论探讨的学术风气有关外，还与他个人反对古文经学的繁琐和守旧思想有关. 他认为数学如"庖丁之理"，应该讲求技巧、见简即用.

三、刘徽的割圆术

刘徽的割圆术是极限思想的开始，他计算体积的思想是积分学的萌芽. 关于割圆术我们可以引用刘徽本人的话来叙述："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣."这句话是什么意思呢？就是用圆内接正多边形的周长、面积来近似代替圆的周长、面积，随着圆内接正多边形的边数增加，正多边形的周长、面积越来越接近于圆的周长、面积. 如果圆内接正多边形的边数无限增加，这时圆内接正多边形的周长、面积就是圆的周长、面积了.

下面我们介绍一下刘徽的割圆术的具体做法.

刘徽割圆术的做法可以分成两步：

第一步，求出圆内接正六边形的周长和面积.

第二步，从圆内接正六边形出发，将正多边形的边数逐次加倍，以此来求得圆的周长和面积的越来越好的近似值.

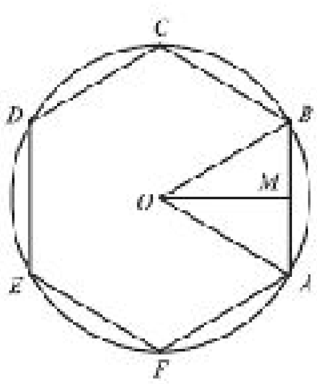


图 4-1

1. 圆内接正六边形的周长和面积

设圆 O 的半径 $r=1$，六边形 $ABCDEF$ 是圆 O 的内接正六边形，如图 4-1 所示. 设正六边形 $ABCDEF$ 的边长、周长、面积分别为 l_6，L_6，S_6.

由 $\angle AOB=60^\circ$ 可知，$\triangle ABO$ 是正三角形，于是 $AB=1$. 易见，$l_6=1$，$L_6=6l_6=6\times1=6$.

为了计算 S_6，我们需要计算 $\triangle ABO$ 的面积. 注意到

$$OM=\sqrt{OB^2-BM^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

我们有△ABO的面积为

$$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}AB\cdot OM=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

最后,我们得到

$$S_6=6S_{\triangle ABO}=6\cdot\frac{1}{2}AB\cdot OM=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

我们知道,半径为1的圆周长是2π,用圆内接正六边形的周长6代替圆周长相当于取$\pi=3$.这是对π的最初步的近似值,古代中国用的就是这个值.

2. 圆内接正十二边形的周长和面积

在圆内接正六边形$ABCDEF$的基础上,将边数加倍,可以得到圆的内接正十二边形.显然,圆的内接正十二边形的周长、面积比圆内接正六边形的周长、面积更加接近圆的周长、面积.设圆的内接正十二边形的边长、周长、面积分别为l_{12},L_{12},S_{12}.如图4-2所示,正十二边形的边长

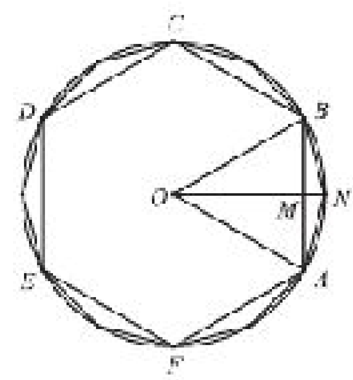


图 4-2

$$\begin{aligned}l_{12}=BN&=\sqrt{BM^2+MN^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+(ON-OM)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+\left(ON-\sqrt{OB^2-BM^2}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{1}{2}l_6\right)^2+\left[r-\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{2}l_6\right)^2}\right]^2}\\&=\sqrt{\frac{1}{4}+\left[1-\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]^2}\\&=\sqrt{2-\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

于是,　$L_{12}=12\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

下面计算正十二边形的面积S_{12}.

$$\begin{aligned}S_{12}&=6(S_{\triangle OAN}+S_{\triangle OBN})\\&=6\left(\frac{1}{2}ON\cdot BM+\frac{1}{2}ON\cdot MA\right)\\&=6\left(\frac{1}{2}ON\cdot AB\right)\\&=\frac{1}{2}(6AB\cdot ON)\\&=\frac{1}{2}L_6\cdot r\end{aligned}$$

-3.

将正多边形的边数逐次加倍，以此来求得圆的周长和面积的越来越好的近似值.

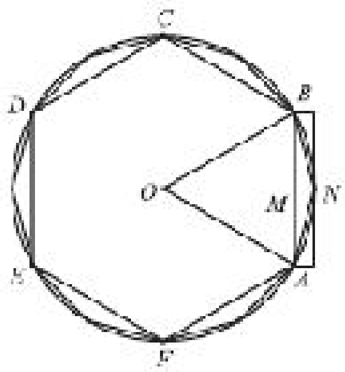


图 4-3

刘徽还注意到，如果在内接正 n 边形的每个边上作一高为 MN 的矩形(如图 4-3 所示)，就可以证明

$$S_{2n}<S_0<S_{2n}+(S_{2n}-S_n).$$

这样，不必计算圆外切正多边形的面积就可以算出圆周率的上下界.

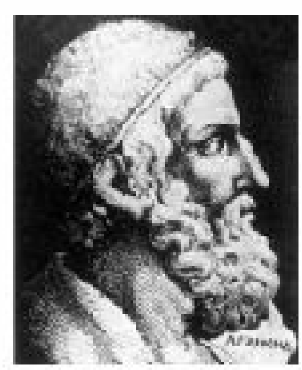
刘徽从圆内接正六边形，并取半径为 1 尺，一直算到 192 边形，得到圆周率 $\pi\approx3.14$，化成分数是 $\frac{157}{50}$，这就是著名的徽率. 刘徽指出，继续算下去，可以得到更精密的近似值.

刘徽的割圆术及其他数学思想不仅奠定了他在我国古代数学史上的重要地位，而且对我国数学史上的发展和数学家的影响也是极其深远的，比如祖冲之父子所取得的伟大成就深受刘徽思想的影响.

习题 4—1

1. 求出单位圆内接正 24 边形的周长和面积. 讨论如何从圆内接正 n 边形的周长和面积确定圆内接正 $2n$ 边形的周长和面积. 体会刘徽割圆术的思想.
2. 阅读有关阿基米德的材料，谈谈阿基米德的贡献.

积分学的先驱——阿基米德


阿基米德

积分思想早在遥远的古希腊时代就已经开始萌芽. 伟大的数学家、力学家阿基米德 (Archimedes, 约公元前 287—公元前 212) 为此作出了重大贡献.

阿基米德生于西西里岛的叙拉古，卒于同地. 在力学方面，他确立了杠杆定律和流体静力学的基本原理(阿基米德原理). "给我一个支点，我可以移动这个地球"是他的名句，广为流传. 阿基米德给出的求面积和体积问题的方法，可以看成是积分思想的萌芽，是他在数学方面作出的最引人注目的贡献，他在这方面的著作则是希腊数学的顶峰.

在阿基米德《论球和圆柱》一书中，第一次出现了球的表面积和体积的正确公式. 他指出：

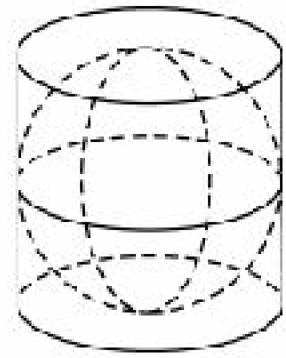
如果圆柱的底等于球的大圆，圆柱的高等于球的直径，则球的表面积恰好等于圆柱的总面积的 $\frac{2}{3}$，圆柱的体积恰好等于球的体积的 $\frac{2}{3}$.

由此容易得出我们熟知的公式：

$$S=4\pi r^2, V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

其中，S 和 V 分别表示半径为 r 的球的表面积和体积．

由此出发，阿基米德推出了球冠的表面积、球缺的体积公式等关于球与圆柱面积和体积的50多个结论．



（第2题）

阿基米德推导球体积的方法是平衡法（附录2中给出了其详细推导）．在这一方法中，他把一个元看成由大量的微元所组成，这与近代的积分法实质是相同的．所有不同的是，他没有说明这种"元素"是有限多还是无限多，也没有摆脱对几何的依赖，更没有使用极限方法．尽管如此，他的思想还是具有划时代意义的，无愧为近代积分学的先驱．

阿基米德之死

绘制在地砖上的阿基米德被士兵杀害的图案

公元前212年，罗马人攻占叙拉古．传说阿基米德正在沙地上画数学图形并陷入沉思．罗马战士向他喝问，沉思中的阿基米德并没有理会他问的是什么，只是说："别动我这些图．"于是罗马士兵将阿基米德捅死了．后来英国哲学家怀特海（A．N．Whitehead，1861—1947）说："没有一位罗马人是由于全神贯注于一个数学图而丧生．"这话指的是罗马人征服了希腊之后，就没有像阿基米德那样忠诚于科学的人了．

阿基米德的死象征一个时代的结束，代之而起的是罗马文明．

阿基米德对于他在《论球和圆柱》一书中作出的贡献十分满意，以至于他希望死后把一个内切于圆柱的球的图形刻在他的墓碑上．后来当罗马将军马塞拉斯得知阿基米德在叙拉古陷落期间被杀的消息时，他为阿基米德举行了隆重的葬礼，并为阿基米德立了一块墓碑，上面刻着阿基米德生前要求的那个图形，以此来表示他对阿基米德的尊敬．这块墓地后来湮没了．令人惊奇的是，在1965年，当为一家新建的饭店挖地基时，铲土机碰到一块墓碑，上面刻着一个内切于圆柱的球的图形．叙拉古人又为他们的这位伟人重建了坟墓．

3．收集数学家伽利略、开普勒和卡瓦列里的有关资料，体会他们对微积分所作的贡献．

§2 圆 周 率

一、关于 π

是谁先发现圆的直径与圆的周长成正比？又是谁先发现圆的面积与圆的直径的平方成正比？这些问题已无从考证．但重要的是，圆的周长与圆的直径的比是多少？我们知道，这个比是 π，或者说，这就是圆周率的定义．

人类对圆周率的探讨，反映了人类追根问底的天性．人类不但探索宇宙的奥秘，而且追求心灵的极限．π 的定义是如此之简单，其表式却是如此之复杂，这就使得 π 成为在古代数学的范畴中，唯一能让现代数学家苦心钻研的问题．

几个世纪以来，数学家一直相信 π 是无理数，直到 1761 年，兰伯特（J. H. Lambert，1728—1777）向柏林科学院提交论文，才证明了 π 的无理性．1882 年德国数学家林德曼（Lindemann，1852—1939）又证明了 π 是超越数，即 π 不是整系数代数方程的解．这就证明了“化圆为方”问题是不可解的．此后，追求 π 的近似值的更多的小数位数，被赋予了新的意义．目前，已求出 π 的小数点后 510 亿位．

二、π 的历史

关于圆周率的最早记录出自约公元前 1650 年的莱茵德草卷，这是一位名叫阿姆士（A'hmose）的埃及抄写员的手稿．他写道：“取直径的 $\frac{8}{9}$ 作为正方形的边长，就可得到和圆面积相等的正方形．”由此得到的圆周率的值是 $\frac{256}{81}$．事实上，设圆的半径是 r，那么圆的面积是 πr^2，而正方形的边长是 $\frac{8}{9}\cdot 2r$，于是我们有

$$\pi r^2=\left(\frac{8}{9}\cdot 2r\right)^2,$$

算出来，$\pi=\frac{256}{81}\approx 3.16$．

莱茵德草卷中的这个公式是有史以来第一次尝试“化圆为方”的公式，它给出了画一个和圆有相同面积的正方形的方法．

希腊人开始研究圆周率的是安提丰(Antiphon,约公元前480—约公元前411)和布里松(Bryson,公元前450左右).安提丰提出了穷竭法,办法和刘徽一样,在圆内作内接正多边形,并用不断增加多边形的边数的方法逼近圆的面积.接着,布里松又跨出重要的一步,他算出了圆的外切正多边形的面积.他认为,圆的面积介于两个正多边形的面积之间.这也许是人类首次从上下两个方向逼近一个值.

200年后,阿基米德对圆周率的计算作出新的突破.他也利用穷竭法,但不是计算正多边形的面积,而是计算正多边形的周长.他计算了两个正96边形的周长.在《圆的度量》(Measurement of Circle)一书中,他证明了圆周和直径的比率小于$3\frac{1}{7}$,大于$3\frac{10}{71}$.

公元6世纪,印度数学家阿耶波多(Aryabhata,I,476—约550)利用正384边形计算出圆周率约为$\sqrt{9.8684}$,它的近似值是3.1416.公元7世纪的印度数学家婆罗摩笈多(Brahmagupta,598—665)求出,直径为1的圆的内接正12,24,48,96边形的周长分别是$\sqrt{9.65}$,$\sqrt{9.81}$,$\sqrt{9.86}$,$\sqrt{9.87}$.据此,他大胆猜测,当正多边形趋近于圆时,它们的周长趋近于$\sqrt{10}$,也就是$\pi=\sqrt{10}$.也许$\sqrt{10}$这个数太好记了,后来这个数就从印度传到欧洲,成了中世纪欧洲通用的圆周率.

中国古代有"周三径一"的说法.到西汉末年,刘歆(公元前50—公元20)为王莽造标准量器使用的圆周率是3.1547.东汉天文学家张衡(公元78—139)取$\pi=\frac{730}{232}\approx3.1466$.另外,在他的球体积公式中,他又取$\pi=\sqrt{10}\approx3.162$.三国时期吴国的王蕃取$\pi=\frac{142}{45}\approx3.1556$.

三、祖冲之与圆周率

对圆周率贡献最大的是中国数学家祖冲之(429—500).

祖冲之,字文远,生于宋文帝元嘉六年,卒于齐东昏侯永元二年.祖籍在范阳郡遒县,今河北省涞源县.他是中国南北朝时期杰出的数学家、天文学家.他先后在南宋朝和南齐朝做过地位较低的官.在公事之余,他从事数学、天文和历法的研究.《隋书·律历志》上有如下一段话:

"古之九数,圆周率三,圆径率一,其术疏舛.自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒,各设新率,未臻折衷.宋末南徐州从事史祖冲之更开密法,以圆径一亿为一丈,圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽;朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽.正数在盈朒二数

之间."

这就是说,祖冲之算出了圆周率数值的上下限:

$$3.1415926<\pi<3.1415927,$$

祖冲之如何算出这组数,历史上没有记载.按照刘徽的方法,算到正 24 576 边形时正好得这个结果.

《隋书·律历志》还记载了祖冲之关于圆周率的另一项重要贡献:

"密率:圆径一百一十三,圆周三百五十五;约率:圆径七,圆周二十二."

这就是说,祖冲之用分数形式确定了圆周率的近似值:约率$\frac{22}{7}$,密率$\frac{355}{113}$.

祖冲之对圆周率逼近的这个记录保持了 1 000 年的领先地位,直到 15 世纪才为阿拉伯数学家卡西所超过.卡西在 1429 年算到了小数点后 16 位.1573 年,出生于马格德堡(Magdeburg)(今属德国)的奥托(Valentinus Otto 或 Valentin Otho,1550? —1605)重新发现密率.

密率的发现孕育着一个深刻的数学问题.在现代数论中,如果将圆周率 π 表示成连分数,其渐近分数是

$$\frac{3}{1},\frac{22}{7},\frac{333}{106},\frac{355}{113},\frac{103\,993}{33\,102},\cdots$$

第 2 项是约率,第 4 项是密率.这些分数对 π 构成最佳逼近.

人类对 π 的认识过程反映了数学理论和计算技术发展的一个侧面.π 的研究在一定程度上反映了某个地区或时代的数学水平.德国数学史家康托(M. B. Cantor,1829—1920)这样评价道:"历史上一个国家所算得的圆周率的准确程度可以作为衡量这个国家当时数学发展水平的指标."

四、圆周率与极限思想

计算圆周率就是计算单位圆的面积,无论是阿基米德的穷竭法,还是刘徽的割圆术,都是逐步逼近的方法."割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆合体而无所失矣."所有这些都是极限思想的体现,这种思想为微积分的最终创立奠定了基础.

关于 π 的计算,一直是数学界十分关注的问题.现在已经发现了很多很好的计算方法.例如 1671 年,苏格兰数学家格列高里(J. Gregory,1638—1675)发现可以利用下面的公式计算圆周率 π:$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$.又如,1777 年,法国数学家蒲丰(G. L. L. Buffon,1707—1788)提出用随机投针实验来计算 π.

习 题 4—2

1. 收集和整理有关 π 发展的历史足迹，体会 π 在人类社会发展中的作用.
2. 找出几种 π 的计算方法，体会它们所反映的数学思想.

§3　微　积　分

一、微积分的创立

17 世纪是从中世纪向新时代过渡的时期．这一时期，科学技术获得了巨大的发展．精密科学从当时的生产与社会生活中获得巨大动力：航海学引起了对天文学及光学的高度兴趣；造船学、机器制造与建筑、堤坝及运河的修建、弹道学及一般的军事问题等，促进了力学的发展．

在这些学科的发展和实际生产中，迫切需要处理下面 4 类问题：

1．已知物体运动的路程和时间的关系，求物体在任意时刻的速度和加速度．反过来已知物体的速度，求物体在任意时刻经过的路程．

计算平均速度可用运动的路程除以运动的时间．但是 17 世纪所涉及的速度和加速度每时每刻都在变化，对于瞬时速度来说，运动的路程和时间都是 0，这就碰到了 $\frac{0}{0}$ 的问题．人类第一次碰到这样的问题．

2．求曲线的切线．这是一个纯几何的问题，但对于科学应用具有重大意义．例如在光学中，透镜的设计就用到曲线的切线和法线的知识．在运动学问题中也用到曲线的切线问题，运动物体在它的轨迹上任一点处的运动方向，是轨迹的切线方向．

3．求函数的最大值和最小值问题．在弹道学中这涉及炮弹的射程问题，在天文学中涉及行星和太阳的最近及最远距离．

4．求积问题．求曲线的弧长，曲线所围区域的面积，曲面所围的体积，物体的重心．这些问题从古希腊开始研究．其中的某些计算，在现在看来只是微积分的简单练习，而过去曾经使希腊人大为头痛．事实上，阿基米德所写的著作几乎都是在讨论这类问题，而他的结果就标志着希腊数学的高潮．

正是科学和生产中面临的这些重要问题，促进了微积分的诞生与发展．

在微积分诞生和发展时期，一批伟大的数学家作出了杰出的贡献，例如，伽利略、开普勒、卡瓦列里、费马、巴罗、牛顿、莱布尼茨等．

科学的重大进展总是建立在许多人一点一滴的工作之上，但是，

常常需要有一个人完成"最后的一步". 这个人需要具有敏锐的洞察力,从纷乱的猜测和说明中整理出前人有价值的思想,需要有足够的想像力,把这些孤立的"碎片"组织起来,并且能够大胆地制定一个宏伟的体系. 在微积分诞生过程中,牛顿和莱布尼茨就是完成这一使命的巨人.

在微积分诞生之后的 18 世纪,数学迎来了一次空前的繁荣,人们将这个时代称为数学史上的英雄世纪. 这个时期的数学家们的主要工作就是把微积分应用于天文学、力学、光学、热学等各个领域,并获得了丰硕的成果.

本节主要介绍牛顿在微积分诞生和发展中的伟人功绩. 关于莱布尼茨的伟大功绩和微积分早期发展史,我们将在本节后的阅读材料中给出.

二、牛顿

牛顿(Isaac Newton,1642—1727)在伽利略去世那年——1642 年出生于英格兰林肯郡伍尔索普村的一个农民家庭,在他出生前两个月他父亲去世了. 少年牛顿不是神童,成绩并不突出,但酷爱读书和制作玩具. 17 岁时,牛顿的母亲曾把他从格兰瑟姆中学召回,在田庄务农. 但是,在牛顿的舅父 W. 埃斯库和格兰瑟姆中学校长史托克斯的竭力劝说下,9 个月后,牛顿的母亲又允许牛顿返校学习. 史托克斯校长的劝说辞中,有一句科学史上最幸运的预言,他对牛顿的母亲说:"在繁杂的农务中,埋没这样一位天才,对世界来说将是多么巨大的损失!"

1661 年,牛顿进入剑桥大学三一学院,受教于巴罗,同时钻研伽利略、开普勒、笛卡儿和沃利斯等人的著作. 三一学院至今还保存着牛顿的读书笔记. 从这些笔记可以看出,就数学思想的形成而言,笛卡儿的《几何学》和沃利斯的《无穷算数》对他影响最深,正是这两部著作引导牛顿走上了创立微积分的道路.

牛顿刚结束了他的大学课程,学校就因为伦敦地区鼠疫流行而关闭. 1665 年 8 月,他离开剑桥,在安静的伍尔索普的家乡度过了 1665 年和 1666 年. 在那里开始了他在机械、数学和光学上的伟大工作,这两年成为牛顿科学生涯中的黄金岁月:创立了微积分、发现了万有引力和光谱理论……可以说牛顿一生大多数科学创造的蓝图,都是在这两年构思的.

1. 微积分的创建

1664 年秋,牛顿开始研究微积分问题. 当时,他反复阅读笛卡儿的《几何学》,对笛卡儿求切线的"圆法"产生了浓厚的兴趣,并试图寻找更好的方法. 就在此时,牛顿首创了小 o 记号,用它表示 x 的增量,

它是一个趋于零的无穷小量.

1665 年夏至 1667 年春，牛顿在家乡躲避瘟疫期间，继续探讨微积分并取得了突破性进展. 据他自述，1665 年 11 月发明“正流数术”(微分法)，次年 5 月又建立了“反流数术”(积分法). 1666 年 10 月，牛顿将前两年的研究成果整理成一篇总结性论文，现在称为《流数简论》. 当时虽未正式发表，但在同事中传阅.《流数简论》是历史上第一篇系统的微积分文献.

《流数简论》反映了牛顿微积分的运动学背景. 该文事实上以速度形式引进了“流数”(微商)的概念，虽然没有使用“微商”这一基本术语，但在其中提出了微积分的基本问题，用现在的数学语言可以表述如下：

(1)已知物体的路程，求物体运动速度的问题.

(2)已知物体运动的速度，求物体路程的问题.

牛顿指出，第一个问题是微分的问题，第二个问题是第一个问题的逆运算，并给出了相应的计算方法. 在此基础上，建立了“微积分基本定理”，它揭示了“导数和积分之间的内在联系”. 当然，对微积分基本定理，并没有给出现代意义下的严格证明. 在后来的著作中，对微积分基本定理，牛顿又给出了不依赖于运动学的较为清楚的证明.

在牛顿以前，面积总是被看成是无限小不可分量之和，牛顿则从确定面积变化率入手，通过反微分计算面积. 这样，牛顿不仅揭示了面积计算与求切线问题的互逆关系，并且十分明确地把它作为一般规律揭示出来，从而建立了微积分普遍算法的基础. 正如牛顿本人在《流数简论》中所说：一旦反微分问题可解，许多问题都将迎刃而解. 自古希腊以来，人们得到了许多求解无限小问题的各种特殊技巧，牛顿将这些特殊技巧统一为两类普遍的算法——正、反流数术，即微分与积分，并证明了二者的互逆关系，进而，他将这两类运算统一成一个整体——微积分基本定理. 这是他超越前人的功绩，正是在这样的意义下，我们说牛顿发明了微积分.

在《流数简论》的其余部分，牛顿讨论了求曲线切线、曲率、拐点，求曲线长度、求曲线围成的面积，求引力与引力中心等 16 类问题. 对这些问题的讨论，牛顿都是运用他建立的统一的算法来处理的. 所有这些充分显示了牛顿创建的“微积分”算法的极大普遍性与系统性.

牛顿于 1667 年春天回到剑桥. 他在这一年 10 月当选为三一学院成员，次年又获硕士学位，并不是因为他在微积分方面的工作，而是因为在望远镜制作方面的贡献.

从那时起直到 1693 年大约四分之一世纪的时间里，牛顿始终不渝努力改进、完善自己的微积分学说，先后写成了 3 篇微积分论文，它

们分别是：

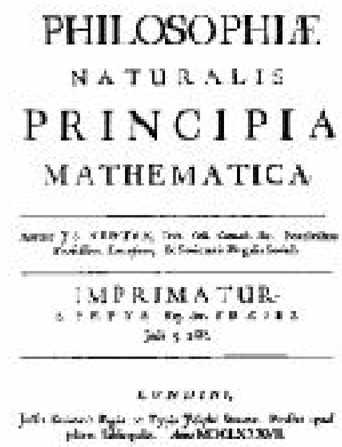
(1)《运用无限多项方程的分析》，简称《分析学》，完成于1669年；

(2)《流数法与无穷级数》，简称《流数法》，完成于1671年；

(3)《曲线求积术》，简称《求积术》，完成于1691年.

牛顿对于发表自己的科学著作态度谨慎.除了两篇光学著作，他的大多数著作都是经朋友再三催促才拿出来发表.上述3篇论文发表都很晚，其中最先发表的是最后一篇《曲线求积术》；《分析学》发表于1771年；而《流数法》则迟至1736年才正式发表，当时牛顿已去世.

1687年，牛顿出版了他的力学名著《自然哲学的数学原理》，简称《原理》，在《原理》中最早表述了牛顿创立的微积分学说，因此，《原理》也成为数学史上的划时代著作.



《自然哲学的数学原理》的扉页

《原理》被爱因斯坦盛赞为“无比辉煌的演绎成就”.全书从三条基本的力学定律出发，运用微积分工具，严格地推导证明了包括开普勒行星运动三大定律、万有引力定律等在内的一系列结论，并且还将微积分应用于流体运动、声、光、潮汐、彗星乃至宇宙体系，充分显示了这一数学工具的威力.

牛顿的科学贡献是多方面的.在数学上，除了微积分，他的代数名著《普遍算术》包含了方程论的许多成果，如虚数根成对出现、笛卡儿符号法则的推广、根与系数的幂和公式等；他的几何杰作《三次曲线枚举》首创对三次曲线的分类研究，这是解析几何发展的一个新的高峰；在数值分析领域，今天任何一本教科书都不能不提牛顿的名字.

牛顿终身未婚，晚年由外甥女凯瑟琳协助管家.牛顿的许多言论、轶闻，是靠凯瑟琳和她的丈夫康杜德的记录流传下来的.其中，家喻户晓的苹果落地与万有引力的故事，就是凯瑟琳告诉著名的哲学家伏尔泰，伏尔泰把这个故事收录在他的名著《牛顿哲学原理》中的.

1727年，牛顿因患肺炎与痛风病去世，葬于威斯特敏斯特大教堂.当时，哲学家伏尔泰参加了盛况空前的葬礼，他亲眼目睹了英国的大人物们争抬牛顿灵柩的情景，无限感叹！

2. 牛顿的历史功绩

牛顿是一位科学巨人，是人类历史上最伟大的数学家之一.

与牛顿一样，为数学作出杰出贡献的数学家莱布尼茨评价道：“从世界开始到牛顿生活的年代的全部数学中，牛顿的工作超过了一半.”

恩格斯对牛顿创立微积分评价道：“在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了，如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹的和唯一的功绩，那正是在这里.”

据他的助手回忆，牛顿往往一天伏案工作 18 小时左右，仆人常常发现送到书房的午饭和晚饭一口未动．偶尔去食堂用餐，出门便陷入思考，兜个圈子又回到住所．惠威尔（W. Whewell）在《归纳科学史》中写道："除了顽强的毅力和失眠的习惯，牛顿不承认自己与常人有什么区别．"

牛顿为人谦虚，胸怀广阔．有一次在谈到自己的光学发现时说："如果我看得更远些，那是因为我站在巨人的肩膀上．"

还有一次，当别人问他是怎样作出自己的科学发现时，他的回答是："心里总是装着研究的问题，等待那最初的一线希望渐渐变成普照一切的光明！"

他还说："我不知道世间把我看成什么人；但是对我自己来说，就像一个海边玩耍的小孩，有时找到一块比较平滑的卵石或格外漂亮的贝壳，感到高兴，而在我面前是未被发现的真理的大海．"

英国著名诗人波普（Pope）是这样描述这位伟大科学家的：

自然和自然的规律
沉浸在一片混沌之中，
上帝说，生出牛顿，
一切都变得明朗．

习题 4—3

1．阅读另一个微积分创始人——著名数学家莱布尼茨的材料，在此基础上再收集和整理一些相关的资料，体会微积分创立的过程和莱布尼茨所作出的伟大贡献，以及他为东西方文化交流所作出的贡献．

莱布尼茨与微积分的诞生

戈特弗里德·威廉·莱布尼茨，1646 年 6 月 21 日出生在德国莱比锡．1661 年入莱比锡大学学习法律，又曾到耶拿大学学习几何，1666 年取得法学博士学位．1672 年他出差到巴黎，受到 C. 惠更斯的启发，决心钻研数学．在这之后，他迈入数学领域，开始创造性的工作．

莱布尼茨不仅是一位最伟大的数学家，也是一位伟大的哲学家．他致力于寻求一种可以获得知识和创造发明的普遍方法，并把它作为终生奋斗的目标．这种努力导致了许多数学的发现，最突出的是微积分学说．牛顿创立微积分主要是从运动学的观点出发，而莱布尼茨则从几何学的角度去考虑．

从 1684 年起，莱布尼茨发表了很多微积分论文．这一年，他的第一篇微分学文章《一种求极大值极小值和切线的新方法》发表，这是世界上最早公开发表的关于微分学的文献．在这篇论文中，他简明地解释了他的微分学．文中给出微分的定义和基本的微分法则．1686 年他在《学艺》杂志上发表第一篇积分学论文．

莱布尼茨精心设计了一套令人满意的微积分符号.他在1675年引入了现代的积分符号"∫",用拉丁单词Summa(求和)的第一个字母S拉长了表示积分.但是"积分"的名称出现得比较迟,它是由雅各布·伯努利于1690年提出的.

莱布尼茨是数学史上最伟大的符号学者.他在创造微积分的过程中,花了很多时间去选择精巧的符号.他认识到,好的符号可以精确、深刻地表达概念、方法和逻辑关系.他曾说:"要发明就得挑选恰当的符号,要做到这一点,就要用含义简明的少量符号来表达或比较忠实地描绘事物的内在的本质,从而最大限度地减少人的思维劳动."现在微积分学的符号基本都是由他创造的.这些优越的符号为以后分析学的发展带来了极大的方便.莱布尼茨发明了一些其他符号和数学名词,例如,用"="表示相等,用"·"表示乘法,以及名词"函数"(function)和"坐标"(coordinate)等.

莱布尼茨多才多艺,在历史上无人可以匹敌.他的著作涵盖历史、语言、生物、地质、机械、物理、法律、外交、神学等诸多方面.

莱布尼茨对中国的科学、文化和哲学思想十分重视.他向耶稣会来华传教士格里马尔迪了解到了许多有关中国的情况,包括养蚕纺织、造纸印染、冶金矿产、天文地理、数学文字等,并将这些资料编辑成册出版.在1695年他编辑出版的《中国近况》一书的绪论中,莱布尼茨写道:"全人类最伟大的文化和最发达的文明仿佛今天汇集在我们大陆的两端,即汇集在欧洲和位于地球另一端的东方的欧洲——中国.""在日常生活以及经验地应付自然的技能方面,我们是不分伯仲的.我们双方各自都具备通过相互交流使对方受益的技能.在思考的缜密和理性的思辨方面,显然我们要略胜一筹".但"在时间哲学,即在生活与人类实际方面的伦理以及治国学说方面,我们实在是相形见绌了."在这里,莱布尼茨不仅显示出了不带"欧洲中心论"色彩的虚心好学精神,而且为中西文化双向交流描绘了宏伟的蓝图,极力推动这种交流向纵深发展,使东西方人民相互学习,取长补短,共同繁荣进步.莱布尼茨为促进中西文化交流作出了毕生的努力,产生了广泛而深远的影响.

他曾经写了一封长达4万字的信,专门讨论中国的哲学.信的最后谈到《易经》.他受中国易经八卦的影响最早提出二进制运算法则.他自己设计了乘法计算机,1673年特地到巴黎去制造.这是继1642年帕斯卡的加法机之后,计算工具的又一进步.他还送过一台他制作的乘法计算机的复制品给康熙皇帝.

然而遗憾的是,在康熙帝死后,雍正帝在1723年下令,除少数外国人在北京钦天监供职外,把其余外国人都安置在澳门,于是中外数学交流暂时中断,从而微积分学传入中国推迟到鸦片战争以后.

2. 阅读以下材料,在此基础上收集整理有关微分学的早期的资料,了解微积分创造的过程,体会社会的发展、科学的发展对数学发展的影响.

微积分早期史料简介

在17世纪,由于两位杰出的数学家伽利略和开普勒的一系列发现,导致了数学从古典数学向现代数学的转变.

伽利略25岁以前就开始做了一系列实验,发现了许多有关物体在地球引力场运动的基本事实,最基本的就是自由落体定律.开普勒在1619年前后归纳为著名的行星运动三大定律.这些成就对后来的绝大部分数学分支都产生了巨大影响.伽利略的发现导致了现代动力学的诞生,开普勒的发现则产生了现代天体力学.

在创立这些学科的过程中，他们都感到一种新的数学工具的需要，这就是研究运动与变化过程的微积分.

有趣的是，积分学的起源可追溯至古希腊时代，但直到17世纪微分学才出现重大突破. 微分学主要来源于两个问题的研究，一个是作曲线切线的问题，一个是求函数最大、最小值的问题. 这两个问题在古希腊曾经考虑过，但古希腊对这两个问题的讨论远不及对面积、体积、弧长问题讨论得那么广泛和深入.

在这两个问题的研究上作出先驱工作的是费马.

费马在1629年给出了求函数极大、极小值的方法. 不过这个思想直至八九年后才较多地为人所知. 开普勒已经观察到，一个函数的增量通常在函数的极大、极小值处变得无限地小. 费马利用这一事实找到了求函数极大、极小值的方法. 他的方法如下：

设 $f(x)$ 在 x 处有极大或极小值. 为了求出极大或极小值，设 e 是一个很小的量，那么 $f(x+e)$ 的值几乎等于 $f(x)$ 的值. 我们可以假定它们相等，即 $f(x+e)=f(x)$. 对这个式子进行化简，然后让 e 等于0，得一方程，这个方程的根就是使 $f(x)$ 取极大或极小值的 x.

例如，函数 $y=f(x)=x^2$，

令 $f(x+e)=(x+e)^2=x^2=f(x)$，即 $x^2+2xe+e^2=x^2$，

化简后得 $2x+e=0$.

令 $e=0$，得 $x=0$.

它的根 $x=0$ 是使函数 $y=f(x)=x^2$ 取极小值的 x.

曲线的切线问题和函数的极大、极小值问题都是微分学的基本问题. 正是这两个问题的研究促进了微分学的诞生. 费马在这两个问题上都作出了重要贡献，被称为微积分学的先驱.

从上面的分析可看出，费马处理这两个问题的方法是一致的，都是先取增量，而后让增量趋向于零. 而这正是微分学的实质所在，也正是这种方法不同于古典方法的实质所在.

费马还曾讨论过曲线下面积的求法. 这是积分学的前期工作. 他把曲线下的面积分割为小的面积元素，利用矩形和曲线的解析方程，求出这些和的近似值，以及在元素个数无限增加，而每个元素面积无限小时，将表达式表示为和式极限的方式. 但是，他没有认识到所进行的运算本身的重要意义，而是将运算停留在求面积问题本身，只是回答一个具体的几何问题. 只有牛顿和莱布尼茨才把这一问题上升到一般概念，认为这是一种不依赖于任何几何的或物理的结构性运算，并给予特别的名称——微积分.

复习题四

收集和整理有关资料，写一个关于微积分的读书报告，可以包括微积分发展的历史和创立过程，数学发展与社会发展之间的关系，等等.

第五章 无 限

数学中的无穷无尽，其诱人之处在于它的最棘手的悖论能够盛开出美丽的理论之花.

——E. Kasner and J. Newman

无穷大！任何一个其他问题都不能如此深刻地影响人类的精神；任何一个其他观点都不曾如此有效地激励人类的智力；但是，没有任何概念比无穷大更需要澄清……

——希尔伯特

§1 初识无限

大约在1872年，德国著名数学家康托关于无限的研究在数学史上引发了一次大地震. 他指出，无限是一个奇妙的新世界，其中不但有大小之分，而且还可以进行计算.

果真如此吗？

一、初识无限

假如你手头有一只大口袋，又有足够多的卡片. 现在，在每一个卡片上依次写上正整数1，2，3，…并将卡片装入口袋. 写完一个，装一个，肯定地，到地老天荒也装不完. 这样，就产生了对无限的一种理解，这种理解强调了一个无限的过程.

我们再举一个例子，我们知道有理数有一个重要的性质，任何两个有理数之间存在着无限个有理数. 例如，0，$\frac{1}{2}$是两个给定的有理数，它们的中点$\frac{1}{4}$仍是一个有理数，0和$\frac{1}{4}$的中点$\frac{1}{8}$也是一个有理数，这样不断地做下去，就说明了在0和$\frac{1}{2}$之间存在着无限个有理数. 同样的，上述做法也强调了一个无限的过程.

无限还有另一种理解. 一条直线上的点是无限的，一个圆周上的点是无限的，平面上的点也是无限的，等等. 直线上点的个数、圆周上点的个数、平面上点的个数都是无限的，它们为我们提供了一些实实在在的无限的实例. 像这样的例子在数学中是非常多的.

例如，自然数集合，整数集合，有理数集合，实数集合，复数集合，平面上三角形的集合，空间中半径不同的球的集合，等等，它们都是反映“无限”的实例.

思考交流

根据上面对无限的理解，请举出一些实例，交流对于无限的认识和理解.

二、理解无限的关键思想——一一对应

斗牛图（戴嵩　唐代画家）

现在我们进入无限的世界，开始无穷之旅. 我们从最熟悉的东西开始. 我们使用的最基本、最重要的工具是“一一对应”. 这是康托在1874年提出的重要的数学概念.

直观地讲，一一对应就是一个对一个. 二牛决斗图，一头牛对一头牛；轻歌曼舞图，一个女士恰对一个男士，不多也不少. 把这一思想概括一下，我们就得到一一对应的概念.

轻歌曼舞图

定义　若在集合 A 与 B 之间，存在元素间的对应法则 f，使得 A 中的任一个元素 a，按照对应法则 f，必有 B 中唯一的元素 b 与之对应；反之，B 中的任一元素 b，按照对应法则 f，必有 A 中唯一的元素 a 与之对应，则称 f 为 A 到 B 上的一对一的映射，简称 f 建立了 A 与 B 之间的一个一一对应.

下面我们看两个一一对应的例子：

实例 1　有 5 个苹果，它们的上面分别贴有编号为 1，2，3，4，5 的标签. 于是，这 5 个苹果当中的每个苹果都有唯一的一个编号. 反过来，对于每个编号，都对应了唯一的一个苹果. 那么 5 个苹果与 5 个编号之间就建立了一个一一对应关系.

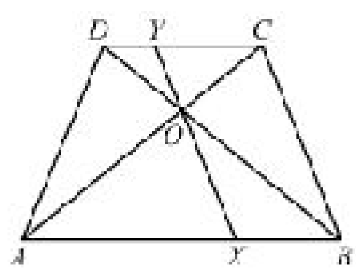


图 5-1

实例 2　已知线段 $AB \parallel DC$（图 5-1），连接 AC 与 BD 相交于点 O，在线段 AB 上任取一点 X，将点 X 与点 O 连线，延长交线段 CD 于点 Y. 不难得到，AB 中的每一点在 CD 中都有唯一的一个点与它对应，AB 中不同的点在 CD 中有不同的对应点；反过来，CD 中的每一点都对应着 AB 中的某一点，这样线段 AB 与 DC 之间建立了一个一一对应关系.

康托的功绩是把一一对应的概念推广到了无限集上，也就是推

广到含有无穷多个元素的集合上.

1886 年，法国数学家克罗内克（Leopold Kronecker，1823—1891）说了一句很有名的话："上帝创造了正整数，其他一切都是人类的创造."1，2，3，…构成正整数，每一个数都有后继数. 我们把全体正整数看成一个集合，叫作正整数集，通常用 $\mathbf{Z}_+$ 表示. 这是我们遇到的最熟悉的一个无限集.

假定我们又有一个数集 T，它由大于 1 的正整数组成：

2，3，4，…

T 与全体正整数集合 $\mathbf{Z}_+$ 相比少了数"1".

现在我们碰到一个新问题：这个新数集 T 所含元素的个数是否与全体正整数集 $\mathbf{Z}_+$ 一样多呢？

从生活经验看，如果我们有一筐梨，被人拿走一个，这个筐里的梨就少了一个. 把这一经验用到刚才的问题上，集合 T 中的元素似乎比正整数集 $\mathbf{Z}_+$ 中的元素少一个.

现在我们提供一种新的认识，在这两个集合之间建立一个一一对应关系，使得正整数集合 $\mathbf{Z}_+$ 的每一个数都能与集合 T 的数配成对，而且一个不多，一个不少. 图 5-2 给出了这种配对法：

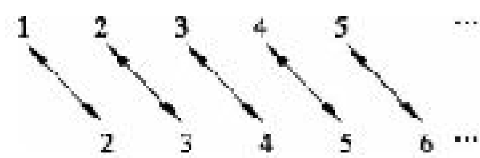


图 5-2

我们也可以把这种对应写成公式：$n \leftrightarrow (n+1)$.

用这种新的观点——一一对应，就说明了集合 T 与全体正整数集合 $\mathbf{Z}_+$ 的元素一样多.

三、基数

有了一一对应的定义，我们可以借助它来给出一个新名词——基数，用它来表示无限集中元素的个数.

定义　在集合 A 与 B 之间，若存在一个一一对应，则称它们有相同的基数，并称它们是对等的.

如果一个集合中只有有限个元素，则这个集合的基数就是它所含元素的个数. 在前面的例子中，全体正整数集与去掉数"1"的新集合 T 具有相同的基数.

定义　若在一个集合与全体正整数集合之间存在一一对应，则称这个集合是可数的.

可数集的直观意义是按照 1，2，3，4，…可以把这个集合中的元素数完.

四、整数集合的基数

从全体正整数集合中拿走一个元素，余下的集合与全体正整数集合具有相同的基数，这意味着一个集合与它的一部分具有相同的基数，这与日常生活的经验是相悖的. 对于有限集来说，它不可能与它的部分具有相同的基数. 可是“无限毕竟是无限”，我们不能借助从有限集中获得经验去理解无限.

下面我们来分析全体整数集合与正整数集合之间的关系. 直观上，全体整数集合比全体正整数集合多了负整数和 0，多了无穷多个元素.

但是，我们仍然可以证明，全体整数集合与全体正整数集合之间存在着一一对应关系. 表 5-1 给出了一个具体的一一对应关系.

表 5-1

全体正整数	1	2	3　4	5	6	7　…	$2n$　$2n-1$	…
全体整数	0	1	-1　2	-2	3	-3　…	n　$-n$	…

表 5-1 给出了全体正整数集与全体整数集间的一一对应，因而全体整数集是可数的.

全体正整数集与全体整数集的一一对应关系不是唯一的，我们还可以给出另一个一一对应关系，如表 5-2：

表 5-2

全体正整数	1	3	5	7	…	$2n+1$	…
全体整数	0	1	2	3	…	n	…
全体正整数	2	4	6	8	…	$2n$	…
全体整数	-1	-2	-3	-4	…	$-n$	…

思考交流

有兴趣的同学可以用解析式表示上述的一一对应关系，并与同学交流.

五、有理数集

下面我们讨论有理数集与正整数集之间的基数关系.

有理数集在数轴上的分布是密密麻麻的，任何两个有理数之间都有无穷多个有理数. 例如，在 0 和 $\frac{1}{3}$ 之间就有无穷多个有理数：$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$，…，$\frac{1}{n}$，…只要 $n>3$，这些数都在 0 与 $\frac{1}{3}$ 之间. 正整数集在数轴

上的分布是稀稀疏疏的. 直观上,有理数集比正整数集的元素多得多. 但是,事实上,我们仍然可以证明有理数集与正整数集有相同的基数,即可以用 1,2,3,4,…数完所有的有理数.

我们需要把全体有理数合理地排列起来. 然后,建立它与正整数集之间的一一对应关系. 图 5-3 给出了有理数的一种排列方式:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & & & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\
 & & & & & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\
 & & & & & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \cdots \\
 & & & & 0 & & & & & & \\
\cdots & -\frac{4}{1} & -\frac{3}{1} & -\frac{2}{1} & -\frac{1}{1} & & & & & & \\
\cdots & -\frac{4}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{1}{2} & & & & & & \\
\cdots & -\frac{4}{3} & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & & & & & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & &
\end{array}
$$

图 5-3

下面,我们建立有理数集与正整数集之间的一种一一对应关系. 直观地说,我们要用正整数 1,2,3,4,…把所有的有理数数完. 从中间的 0 开始数起,画一个矩形的螺旋线,碰到一个有理数,我们就把它圈起来,相当于我们数过它. 让有理数 0 对应于正整数 1;接着移向右上方 $\frac{1}{1}=1$,使它对应于正整数 2;$-\frac{1}{1}=-1$ 对应于正整数 3;有理数 $\frac{2}{1}=2$ 对应于正整数 4. 下一个有理数是 $\frac{2}{2}=1$,它已经被数过了,所以跳过去,移到 $\frac{1}{2}$,让它对应 5;然后让 $-\frac{2}{1}=-2$ 对应 6;因为 $-\frac{2}{2}=-1$,所以跳过它到 $-\frac{1}{2}$,让它对应 7. 就这样继续下去. 按照这一路线,每个有理数都会被数到,它将对应一个唯一的自然数.

这样,我们证明了全体有理数集与正整数集具有相同的基数,即全体有理数是可数的.

图 5-4 给出了一个很好的视觉形象,对应规则一览无余,且规则清晰,容易记忆.

为书写简单,我们还可以将它简化为表 5-3:

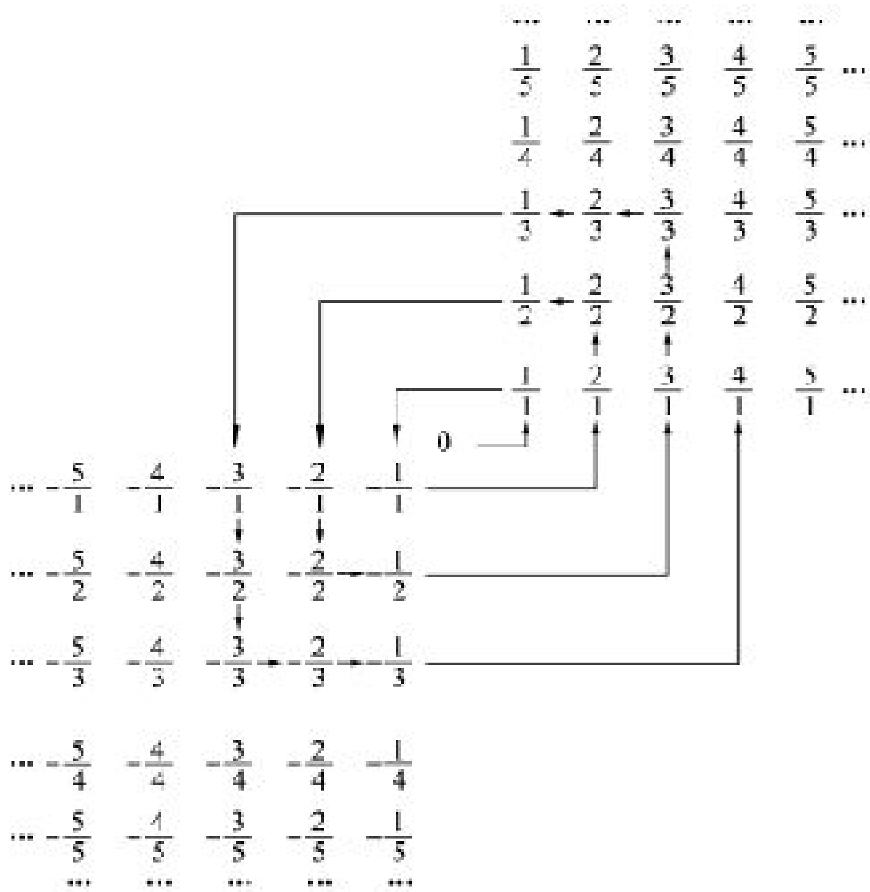


图 5-4

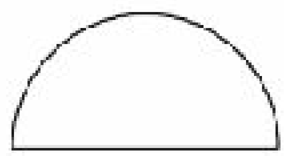
表 5-3

1	↔	0
2	↔	$\frac{1}{1}$
3	↔	$-\frac{1}{1}$
4	↔	$\frac{2}{1}$
5	↔	$\frac{1}{2}$
6	↔	$-\frac{2}{1}$
7	↔	$-\frac{1}{2}$
8	↔	$\frac{3}{1}$
9	↔	$\frac{3}{2}$
10	↔	$\frac{2}{3}$
…	↔	…

到此为止，我们还没有找到一个比正整数集的基数更大的无限集. 是不是所有的无限集都具有相同的基数呢？

习 题 5—1

1. 用 W 表示所有以 5 结尾的正整数，即 $W=\{5,15,25,35,\cdots\}$，建立 W 与正整数集的一一对应关系.
2. 用 C 表示全体正整数的立方所成的集，即 $C=\{1,8,27,64,\cdots\}$，证明数集 C 与正整数集有相同的基数.
3. 设计一种方案，建立 0 与 1 之间的全部有理数集与全体正整数集之间的一一对应关系.
4. 一条直径把一个圆分成两个半圆，设 A=直径上的点集，B=半圆上的点集．证明：A 与 B 有相同的基数.



（第 4 题）

*§2　实数集的基数

一、两封书信抵万金

1873年11月29日康托给著名的数学家戴德金(Dedekind，1831—1916)写了一封信，信中这样写道：

“我可以问你一个问题吗？我对它有某种理论上的兴趣，或许你能回答它，并且愿意费心给我回一封关于这个问题的信．这个问题是：假设有一个包含所有正整数 n 的集合，并把它表示为 $\mathbf{Z}_+$，进而考虑所有正实数 x 的集合，并把它表示为 $\mathbf{R}_+$．这个问题是：$\mathbf{Z}_+$ 能以这样一种方式与 $\mathbf{R}_+$ 配对吗？即使一个集合中的每一个元素与另外集合的一个元素，并且仅仅与一个元素对应．初看上去，一个人可能对自己说：‘不，这不可能，因为 $\mathbf{Z}_+$ 是由不连续的元素组成，而 $\mathbf{R}_+$ 是一个连续统(注：指直线上所有点的集合)．’但使用这个反对的理由不能证明任何东西．尽管我也觉得 $\mathbf{Z}_+$ 和 $\mathbf{R}_+$ 不可能进行那样的配对，但是我仍然找不到理由，这就是使我烦恼的原因，虽然它可能非常简单．”

康托在信中提出的问题是：$\mathbf{Z}_+$ 和 $\mathbf{R}_+$ 之间是否存在着一个一一对应的关系？

不久，康托发现了不存在这样的配对，也就是他给出一个证明，证明实数集合是不可数的．1873年12月7日，他又给戴德金写了一封信，说道：“最近我有时间对我向你提出的猜想继续进行了较为充分的研究，直到今天我才认为我完成了这项工作．如果我弄错了，我将不能找到比你更为宽大的裁判者了，因而我冒昧地把我第一次写的不完善的草稿送交给你去判断．”

在11月29日到12月7日这短短的几天里，康托给无限的理论奠定了基础．1890年他发现了实数集合不可数的第二个证明，新证明更为简单，下面介绍康托的第二个证明．

二、康托的对角线法

康托的第二个证明使用了反证法．他考虑，如果能够建立实数集与正整数集之间的一一对应，将会出现什么结果呢？于是他试着去建立这种对应．结果是，无论建立怎样的对应，总有实数被漏掉．用这

种方法证明了实数集是不可数的. 在这里,我们只考虑 0 和 1 之间的实数集合(0,1),(0,1)中的每一个实数都可以用十进制小数的形式表示,由于 0.500 0…与 0.499 9…表示同一个实数,为了保证一一对应关系,我们只取 0.500 0…这种表示. 下面,证明实数集合(0,1)是不可数的.

定理 1　实数集(0,1)是不可数的.

证明　假设实数集(0,1)是可数的. 实数集(0,1)中的每一个实数都可以用十进制小数的形式表示. 这样,我们就可以按照给定的一一对应关系. 把实数集(0,1)与正整数集之间的对应关系用表 5-4 表示:

表 5-4

1	$\leftrightarrow$	$0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots$
2	$\leftrightarrow$	$0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots$
3	$\leftrightarrow$	$0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots$
…		…
k	$\leftrightarrow$	$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}a_{k4}\cdots$
…		…

现在,我们构造一个新的实数 b:

$$b=0.b_1b_2b_3b_4\cdots \quad 0\leqslant b_i\leqslant 9, i=1,2,\cdots$$

使得 $b_1\neq a_{11}, b_2\neq a_{22}, b_3\neq a_{33}, \cdots, b_k\neq a_{kk}, \cdots$ 并且 b_i 都不取 0 和 9.

显然,这样构造出的数 b 位于 0 与 1 之间.

由于 $b_1\neq a_{11}$,所以数 b 不同于序列中的第一个数

$$0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots$$

由于 $b_2\neq a_{22}$,所以数 b 不同于序列中的第二个数

$$0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots$$

同样的方法,数 b 不同于序列中的任何一个数.

数 b 不可能是 $0.000\cdots=0$,也不可能是 $0.999\cdots=1$. b 一定严格位于 0 与 1 之间. 因而它不在序列中,这和实数集(0,1)与正整数集一一对应相矛盾. 这就是说,实数集(0,1)是不可数的.

这样,我们发现了两个基数不同的无限集:实数集(0,1)与正整数集. 这件事是令人惊奇的,它是数学史上的重大事件.

在上面的证明中,使用的方法叫作**康托对角线法**,它是一种非常重要的思想方法. 这种证明方法已经变成了一种模式,很多不同数学结果的证明都用到它.

如果集合 A 与集合 B 的某个子集是对等的,而不与 B 对等,我们就说集合 A 的数量少于集合 B 的数量,或集合 B 的数量多于集合

A 的数量.

现在我们可以指出有理数集和无理数集的一个重要区别了：前者是可数的，后者是不可数的.

因为假定无理数集是可数的，那么，所有有理数集与所有无理数集的和集也应该是可数的. 但是这个和集恰恰是全部实数的集合，它是一个不可数集. 这样就出现了矛盾. 因此得到下面的定理.

定理 2　无理数集是不可数的.

这就是说，无理数在数量上大大超过有理数. 尽管有理数在数轴上处处稠密，但与无理数相比不过是沧海一粟.

那么，是否还存在数量上多于实数集的集合呢？康托的答案是肯定的. 有兴趣的同学可以阅读有关集合论的参考书.

习　题　5—2

1. (1) 全体偶数多，还是全体正整数多？
   (2) 全体有理数多，还是全体正整数多？
   (3) 全体实数多，还是全体有理数多？
2. 0 与 1 之间满足下述条件的实数：它们的十进小数表示中只有 1 和 2，而不含其他数字，例如 0.112 221 212…证明：所有这样实数的集合其基数大于正整数集的基数.

复习题五

阅读以下材料，进一步体会无限的概念.

一段富有启发性的历史对话

在1638年，伽利略在《关于两种新科学的对话》中插进了3个文艺复兴时期的绅士的谈话，下面转载这个谈话，让我们仔细地把谈话的论点检查一下，确定哪些观点是正确的，哪些观点是错误的，然后提出康托的基本发现.

辛普利邱："现在有一个我解决不了的难题，很清楚，由于我们可以有一条比另一条线段更长的线段，其中每一条都包含着无穷数目的点，所以我们就不得不承认，对一条线段和线段内的所有点来说，我们有比无限还要大的东西，因为长线段上的无限的点比短线段上的无限的点要多. 这种赋予一个无穷的数量以大于无限的值的做法使我无法理解."

萨尔维阿蒂："这是当我们企图以有限的智力讨论无限，并赋予它我们给有限的东西同样的性质时所出现的困难. 但是我认为这样做是错误的，因为我们对一个无限的量不能说它大于、小于或等于另一个无限的量. 要证明这一点，我进行了推理，为了清楚起见，我将以向提出这种困难的辛普利邱提问的形式叙述这个问题. 我认为你当然知道哪些数是平方数，而哪些不是."

辛普利邱："我当然知道一个平方数是由某一个数自乘后得出的，从而4，9等数是平方数，它们是由2，3等数自乘后得到的."

萨尔维阿蒂："很好，而你也知道乘积叫作平方数，而因子叫作根(注：乘积$2\times2=4$叫平方数，2叫作4的根)；另一方面，由两个不相等的因子组成的数不是平方数(注：乘积$2\times3=6$不是平方数). 因此，我说包括平方数和非平方数在内的所有数比单独的平方数多，对不对?"

辛普利邱："当然是这样."

萨尔维阿蒂："如果我进一步研究有多少平方数，一个可能的答案是，存在着和对应的根一样多的平方数，因为每个平方数都有它自己的根，同时每个平方数只有一个根."(注：9是平方数，它的根是3，而且在自然数的范围内，只有3)

辛普利邱："正是这样."

萨尔维阿蒂："但是，如果我追问究竟有多少个根时，那么不能否认，有多少个数就有多少个根，因为每个数都是某个平方数的根. 这就使得我们必须这样假定：有多少个数就有多少个平方数，因为平方数正好和它们的根一样多，而所有的数都是根. 然而在开头我们说过，数比平方数要多，因为大部分的数不是平方数. 不仅如此，平方数的比例随着数的增加而减少. 到100为止，有10个平方数(注：它们是1，4，9，16，25，36，49，64，81，100)，即平方数占所有数的$\frac{1}{10}$，而到10 000时，我们发现，仅有$\frac{1}{100}$的数是平方数，到100万时，平方数只占$\frac{1}{1\,000}$(对有限的数来说情况如此). 在另一方面，对一个无穷大的数来说，如果一个人能想像出这样一种东西，那么他将不得不承认，平方数和所有的数总和一样多."

沙格列陀："在这种情况下，人们必须得出什么结论呢?"

萨尔维阿蒂："我认为到现在为止，我们只能这样猜想：所有的数的总数是无限的，平方数的数目是无限的……平方数的数目既不少于所有数的总数，而后者也不多于前者. 最后，对无限来说，"等于""大于""小于"等属性是不能使用的，它只能使用于有限的数量. 因此，当辛普利邱提起一些不同长度的线段，并问我怎样才能使较长的线段不比较短的线段包含更多的点时，我回答说，一条线段不能包含比另一条线段更多或更少或刚好相等的点，而只能是每一条线段包含着无限数目的点(如图(1)长短不同的线段). 如果

我回答他说，一条线段上的点的数目与它们的平方数的数目相等，另一条线段上的点的数目大于数的总数；而一条较短的线段上的点的数目与立方数的数目一样多。那么这种使一条线段比另一条线段有更多的点，而仍然说，每一条线段具有无穷大的数量的说法是不能使他满意的。对于第一个困难我就说到这里。”

沙格列陀：“请停一下，我有一个想法，让我把刚才讲的东西补充一下。如果上述的话是正确的，那么我就不能说一个无穷大的数大于另一个无穷大的数……”

（1）

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1 & 4 & 9 & \cdots & n^2 & \cdots \end{array}$$

（2）

（复习题图）

在谈话中，萨尔维阿蒂相信，平方数1，4，9，…与正整数可以建立一一对应（如图(2)所示），但他找不出对应方法。

上面是一段很精彩的对话，它说明远在康托的集合论创始之前，伽利略已经对无限有了很好的理解。这段对话较长，这里作一个简要总结：

(1) 任何线段都包含无限个点。

(2) 萨尔维阿蒂证明了，正整数和它的平方数可建立一一对应……

(3) 萨尔维阿蒂认为，“等于”“大于”“小于”等属性不能使用于无限的数量。

(4) 不能以有限的智力来讨论无限。

(5) 他还找不出[0，1]区间的全体实数与自然数中的全体平方数的一一对应。

第六章 名题赏析

人类的生产实践、科学技术的进步、各个学科的发展等等，不断地向数学提出各种各样的问题，在解决这些问题的过程中，数学在不断地前进，不断地发展.另一方面，在数学的发展中，数学本身也不断地产生一些新的问题，这些问题也成为了数学发展的动力.数学就是在不断地提出问题、解决问题的过程中获得发展.很多人把问题看作是数学的心脏，数学发展的动力.

什么样的问题是好问题呢？希尔伯特有一段精彩的论述："要想预先正确判断一个问题的价值是困难的，并且常常是不可能的；因为最终的判断取决于科学从该问题获得的收益.虽说如此，我们仍然要问：是否存在一个一般准则，可以借以鉴别好的数学问题.一位法国数学家曾经说过：一种数学理论应该这样清晰，使你能向大街上遇到的第一个人解释它.在此以前，这一理论不能认为是完善的.这里对数学理论所坚持的清晰性和易懂性，我想应该把它作为一个数学问题堪称完善的要求.因为，清楚的、易于理解的问题吸引着人们的兴趣，而复杂的问题却使我们望而却步."

"其次，为了具有吸引力，一个数学问题应该是困难的，但是，却不能是完全不可解决的，使我们白费力气.在通向那隐藏的真理的曲折道路上，它应该是指引我们前进的一盏明灯，最终以成功的喜悦作为对我们的奖赏."

在数学史上，这样的例子是不胜枚举的.本章介绍几个著名的数学问题.

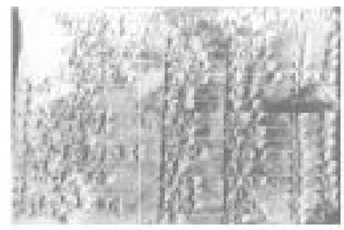
§1　费马大定理

一、勾股数

满足勾股定理 $x^2+y^2=z^2$ 的正整数解叫作勾股数.

勾股定理和勾股数的历史十分悠久.

古巴比伦的数学中很早就有了勾股数,"普林顿 322"上就列出了15组勾股数."普林顿 322"是出土的古巴比伦王国时期的泥版,年代为公元前1900年～公元前1600年,该泥版现保存在美国哥伦比亚大学图书馆.



普林顿 322

中国对勾股定理和勾股数认识的年代也十分久远.《周髀算经》卷上记载了西周开国时期周公(约公元前1100年)与大夫商高讨论勾股测量的对话,商高答周公问时提到"勾广三,股修四,径隅五".(3,4,5)就是一组勾股数.

古希腊的毕达哥拉斯学派对勾股定理和勾股数作了深入的研究,例如,发现了一个勾股数的公式,即 $2n+1$,$2n^2+2n$ 为直角边,$2n^2+2n+1$为斜边.西方称勾股定理为毕达哥拉斯定理,称勾股数为毕达哥拉斯数.

二、费马大定理的提出

丢番图(Diophantus)是古希腊后期最伟大的数学家之一.但是,有关他的生平我们至今几乎一无所知.只是从一本记载了丢番图墓志铭的古希腊诗歌集中知道他活了84岁.

丢番图的《算术》以解不定方程著称.不定方程指的是这样的方程,其中方程式的个数少于未知数的个数,而且要求方程式的解是整数.例如,下面的方程都是不定方程:

$$x+y+z=100,x^2+y^2=z^2.$$

虽然,在丢番图之前已有人对不定方程作了研究,但是,丢番图是对不定方程进行广泛而又深入研究的第一人.丢番图的《算术》对后世产生了深远的影响.

在丢番图的《算术》中,有一个不定方程最为著名,就是"将一个已知的平方数分成两个平方数."1637年左右,法国数学家费马(Pierre de Fermat,1601—1665)在阅读这个命题时,用拉丁文在书的

页边写下了一段批语：

"但一个立方数不能分拆为两个立方数，一个四次方数不能分拆为两个四次方数．一般说来，除平方之外，任何次幂都不能分拆为两个同次幂．""我已经发现了一个真正奇妙的证明，可惜书上的空白太小，写不下．"

用现代数学语言表达，费马所写的批语就是一个数学命题：

$$x^n+y^n=z^n,\ xyz\neq0,$$

当 $n>2$ 时，方程没有整数解．

这就是举世闻名的**费马大定理**．

费马作为数学家而闻名于世．但是，有两件事使人惊奇：第一，他是一位循规蹈矩的律师，后来成为当地议会的议员，一生都过着单调而又平静的生活，数学只是他的业余爱好，然而他不仅与笛卡儿分享了创造解析几何的荣誉，而且与帕斯卡（Blaise Pascal，1623—1662）同是概率论的创始人，此外，他还独自创立了数论这一数学的重要分支；第二，他生前从来没有发表过一篇作品．在他去世后，他的儿子萨缪尔（Samuel）把他的文章、信件以及对丢番图《算术》一书的批注等进行整理，并集结成书发表于世．

三、费马大定理的解决过程

费马本人证明了 $n=4$ 的情况：

定理　方程 $x^4+y^4=z^4$ 没有非零整数解．

由此很容易证明"对任何正整数 m，方程 $x^{4m}+y^{4m}=z^{4m}$ 无解"．

证明　若方程有解，设解为 X,Y,Z，那么令 $x=X^m$，$y=Y^m$，$z=Z^m$ 就得到 $x^4+y^4=z^4$ 的一组解．与定理矛盾．

这样一来，费马定理对于 4 的倍数的 n 都成立．今考虑 $n>2$ 的任意指数．它或者可被大于 2 的素数整除，或者可被 4 整除，或者被两者整除．因而，根据上面的分析，要证费马大定理，只需证 n 是奇素数时成立就行了．即只需证明对任意奇素数 p，方程

$$x^p+y^p=z^p$$

没有非零整数解即可．

因为，如果对于任意给定的指数 p 能证明费马大定理成立，那么按照上面的证法，定理对指数为 p 的任意倍数时也真．

数学家欧拉证明了 $n=3$ 时定理成立；

1825 年，狄利克雷（Dirichlet，Gustav Peter Lejeune，1805—1859）和勒让德（Legendre Adrien Marie，1752—1833）证明了 $n=5$ 时定理

成立：

1839 年德国数学家拉梅(G. Lamé)证明了 $n=7$ 时定理成立；

高斯的学生库默尔(E. E. Kummer，1810—1893)证明了对于所有小于 100 的素数指数 n，定理成立.

库默尔在定理的证明上保持了 100 多年的领先地位.

在他之后，这一问题的研究长期停滞不前，其间也有许多数学家试图证明，结果均以失败而告终. 例如，现代积分理论的奠基人勒贝格(Lebesgus，Henri Léon，1875—1941)就向法国科学院提交过一个证明. 法国科学院大为振奋，以为这个世界难题将由法国人自己解决，经过审查，仍然发现了漏洞. 以至于许多数学家对这个定理的证明都敬而远之. 就连以攻克数学难题而著称的大数学家希尔伯特(Hilbert David，1862—1943)，当有人问他为什么不试试解决这个难题时，他也风趣地回答："干吗要杀死一只会下金蛋的鹅?"

1955 年左右，日本数学家谷山丰(Y. Taniyama，1927—1958)和志村五郎(G. Shimura)提出了谷山—志村猜想：有理数数域上的椭圆曲线都是模曲线.

1983 年，费马大定理的证明出现了新的转机，德国数学家法尔廷斯(G. Faltings)证明了莫代尔猜想(L. Mordell，1922—)：方程 $x^n+y^n=1$，其中 n 是自然数，至多有有限多个有理数解. 这就是说，$x^n+y^n=z^n$ 最多有有限个解.

1985 年，德国数学家弗雷(G. Frey)指出了费马猜想与谷山—志村猜想之间的重要联系，并提出弗雷命题.

1986 年，美国数学家里贝特(K. Ribet)证明了弗雷命题，这就表明，只要能解决谷山—志村猜想，就能解决费马大定理.

但是许多数学家没有想到的是，解决费马大定理的日子来的是那么地快.

事情发生在 1993 年 6 月 23 日，在英国剑桥牛顿研究所的演讲厅里，在普林斯顿大学任教的英国数学家维尔斯(A. J. Wiles，1953—)在黑板上飞快地写着一堆堆的数学公式，最后当他平和地对演讲厅里 200 多名数学家说"我想我就在这里结束"时，数学家们惊呆了，接着鼓起掌来，并开始庆贺. 因为他向世界宣布了一个震惊的消息，费马大定理被证明了！

维尔斯

事情出现了反复. 经过专家审查发现，维尔斯的证明中存在着一些漏洞. 维尔斯很快承认了他的证明存在着问题. 很多人又开始怀疑，维尔斯能否解决存在的问题呢？面对巨大的压力，维尔斯经过一年多的艰苦努力，到 1994 年 9 月，漏洞终于被补上，并通过了权威的审查. 1995 年 5 月，世界权威学术期刊《数学年刊》(Annals of Mathe-

matics)发表了维尔斯修正后的证明.经过 300 多年的努力,费马猜想终于成为了费马大定理!

1996 年 3 月,维尔斯因此荣获沃尔夫奖.

下面一段话表述了维尔斯进行数学研究时的感受:“设想你进入大厦的第一个房间,里面很黑,一片漆黑.你在家具之间跌跌撞撞,但是逐渐你搞清楚了每一件家具所在的位置,最后,经过 6 个月或再多一些的时间,你找到了电灯的开关,拉开了灯.突然整个房间充满光明,你能确切地明白你在何处.然后,你又进入下一个房间,又在黑暗中摸索了 6 个月.因此,每一次这样的突破,尽管有时候只是一瞬间的事,有时候要一两天的时间,但它们实际上是这之前的许多个月里在黑暗中跌跌撞撞的最终结果,没有前面的这一切,它们是不可能出现的.”

四、启示

为什么费马猜想引起了那么多数学家的关注和兴趣呢?原因在于这个问题是个好问题.

一方面,费马大定理的解决是综合运用许多数学分支的结果,比如代数几何、群表示论等,这些数学分支为该定理的证明提供了强有力的工具和支持.

另一方面,费马大定理的证明给整个数学带来了巨大财富,产生了许多数学理论和方法,形成了一些数学分支.比如,库默尔在证明该定理的过程中,促使了代数数论的形成和发展;又如,算术代数几何的建立也有赖于费马大定理的证明.正如希尔伯特所说,费马大定理确实是“一只会下金蛋的鹅”.

习 题 6—1

1. 搜集和整理有关费马大定理的材料,感受解决数学问题对数学发展的作用.
2. 重新阅读维尔斯的研究感言,谈谈在数学学习中类似的经历.

§2　哥尼斯堡七桥问题

一、问题的来源

故事发生在18世纪的哥尼斯堡城，哥尼斯堡城即今俄罗斯的加里宁格勒市. 这座城市建立在普雷格尔河畔，由4块分开的区域——北区、小岛、南区和东区组成，中间有7座桥相连，如图6-1所示. 当时那里的居民热衷于一个游戏：一个散步者怎样才能一次走遍7座桥，每座桥只走过一次？这个问题看起来不难，谁都愿意试一试，但是没有人找到答案.

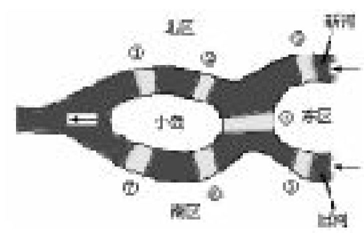


图5-1

最后，问题由欧拉（L. Euler，1703—1783）解决. 1736年，他证明了根本不存在这样的走法，并在圣彼得堡科学院作了一次关于这个问题的报告.

实质上，七桥问题是数学问题，具体而言是几何问题. 但是，在当时除了欧拉以外，没有人认识到这一点. 这并不令人惊奇，即使现在绝大多数人也看不出这是数学问题. 从实际问题中辨别出数学问题是一种本领，需要培养和训练，它不是自发产生的.

二、尝试

在介绍欧拉解决该问题的方法之前，我们先试一下能否解决它.

假如从南区出发，过桥⑥到小岛，过桥②到北区，过桥①再次回到小岛，过桥⑦又回到南区，过桥⑤到东区，下面我们只有桥④和桥③可以通过. 如果过桥③到北区，那么就没有办法再过桥④；如果过桥④到小岛，那么就没有办法再过桥③，如图6-2所示. 结果是我们不能将每座桥既不重复也不遗漏地通过一次.

或许是我们所选择的路线不恰当导致了问题无法解决，不妨再试试其他的路线，结果也一样. 下面来看看欧拉是如何解决问题的.

三、欧拉的方法

欧拉并没有像刚才我们所做的那样试着沿7座桥走一走来寻找答案. 他看出两岸的陆地与河中的小岛都是桥的连接点，它们的大小和形状与问题没有联系，因此，可以看成是4个点A，B，C，D；而7座桥是7条必须经过的路线，它们的长短和曲直对问题的解决也没有关

系，因此，可以用任何曲线来表示. 从而，问题就抽象成以下的图形（如图 6-2、图 6-3 所示），这两个图形体现了欧拉对这个问题的思维过程.

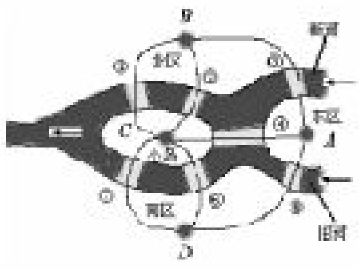


图 6-2

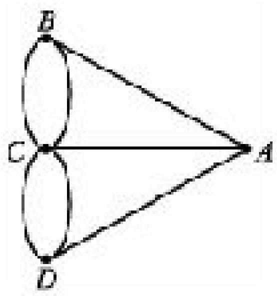


图 6-3

于是，七桥问题转化为这样一个问题：从 A,B,C,D 4 点中的任意一个点出发，是否能既不重复也不遗漏地把每一条线都走上一次？实际上，这是一个一笔画问题，即能否在笔不离开纸的情况下，一笔而又不重复地画完这个图形？

我们把图 6-3 称为一个图. A,B,C,D 称为图的**顶点**，连接顶点的线段或曲线叫作**图的边**. 如果在一个顶点处有偶数条边通过，则称这个顶点是**偶顶点**. 如果在一个顶点处有奇数条边通过，则称这个顶点是**奇顶点**.

现在我们分析一下画图的过程. 如果我们从某一点出发一笔画出了一个图形，而到某一点停止，那么中间每经过一点，总有进去的一条边和出来的一条边. 所以除了起点和终点这两点外，这个图上的每一顶点都应该和偶数条边相联结. 如果起点和终点相重合，那么起终点也应该和偶数条边相联结. 如果起点和终点不重合，那么起、终点将与奇数条边相联结.

于是，欧拉得出了一个关于一笔画的结论，即可以一笔画成的图，或者没有奇数顶点，或者只有两个奇数顶点，而且只限于这两种情况.

我们利用欧拉得出的结论来看哥尼斯堡七桥问题. 这个图中共有 4 个点 A,B,C,D，其中 A,B,D 分别与 3 条边相连，C 与 5 条边相连，即 A,B,C,D 这 4 个点都是奇数顶点，因此，根据欧拉的结论，这个图不能一笔画出，即哥尼斯堡七桥问题的答案是否定的.

四、哥尼斯堡七桥问题与图论、拓扑学

欧拉把哥尼斯堡七桥问题抽象成图进行讨论，影响深远.

首先，欧拉的工作推动了图论的诞生. 图论是一个十分有趣而又应用广泛的数学分支. 欧拉所提交给圣彼得堡科学院的论文《哥尼斯堡的七座桥》也成为了有关图论的第一篇论文. 如今，图论已经渗透到群论、数值分析、矩阵理论等数学分支之中，同时在计算机科学、物理学、化学、生物学以及工程技术等领域都有广泛的应用.

其次，欧拉的工作推动了另一门新的几何学分支——拓扑学的诞生. 在论文《哥尼斯堡的七座桥》的开头部分，他描述了这种新的几何：“讨论长短大小的几何学分支，一直被人们热心地研究着，但是还有一个至今几乎完全没有探索过的分支；莱布尼茨最先提起过它，称之‘位置的几何学’. 这个几何学分支只讨论与位置有关的关系，研究位置的性质，它不去考虑长短大小，也不牵涉量的计算，但是至今未有过令人

满意的定义，来刻画这门位置几何学的课题和方法……”

拓扑学就是研究“位置的几何学”的数学分支，有人把它形容为“橡皮泥的几何学”，也就是对一块“橡皮泥”可以任意揉搓，不允许撕裂也不允许粘连．在这种情况下，研究“橡皮泥”有哪些性质保持不变．现在，拓扑学已经发展成为一门成熟的数学分支，成为数学的基础学科．

有兴趣的同学可以参考专题《欧拉公式与闭曲面分类》《统筹法与图论初步》．

五、欧拉

困扰了人们许多年的著名的哥尼斯堡七桥问题，欧拉仅仅花了几天的时间就完满地解决了它．欧拉是解决问题的能手，是历史上最伟大的数学家之一．

欧拉

欧拉1707年出生在瑞士巴塞尔城的一个牧师家庭，13岁就进入巴塞尔大学读书，老师是著名数学家约翰·贝努利(John Bernoulli，1667—1748)．

1727年，欧拉在争取巴塞尔大学的物理教师职位失败后，经过贝努利家族的另一位著名数学家丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli，1700—1782)的推荐，同年5月17日欧拉来到了圣彼得堡(St. Petersburg)科学院工作．

1733年，欧拉担任了圣彼得堡科学院数学教授，年仅26岁．

1735年，欧拉解决了一个天文学的难题(计算彗星轨道)，这个问题曾经使几个著名数学家花费了几个月的时间才得到解决，而欧拉用自己发明的方法，3天便完成了这个工作．过度的劳累使他患了眼病，不幸右眼失明了，这时他才28岁．

在早期工作中，欧拉作出了重要的贡献．欧拉创造了许多数学符号，比如用$f(x)$表示函数，三角形ABC的3边用a，b，c来表示，求和的符号用Σ表示，虚数的单位i以及自然对数的底e，常用对数符号log等．圆周率π也是1737年欧拉采用后才广泛流传使用的．

1741年，欧拉应普鲁士腓特烈大帝(Frederick the Great)的邀请，到柏林担任科学院物理数学所所长．

1766年，在沙皇喀德林二世的诚恳邀请下重回圣彼得堡，不料没过多久，他的左眼患白内障，视力严重衰退，最后完全失明．

欧拉在俄罗斯

不幸的事情接踵而来，1771年圣彼得堡的大火灾殃及欧拉住宅，带病而失明的64岁的欧拉被围困在大火中，虽然他被别人从火海中救了出来，但他的书房和大量研究成果全部化为灰烬了．

如此沉重的打击并没有使坚强的欧拉倒下，他仍然以惊人的毅力

不懈地与黑暗作斗争，凭着记忆和心算进行研究，以口述的形式撰写论文，直到 1783 年逝世，时间长达 17 年之久. 欧拉一生结过两次婚，是 13 个孩子的父亲. 1783 年 9 月的一天，欧拉在与同事讨论天王星轨道计算后，疾病发作，喃喃自语道："我要死了！"巴黎科学院秘书孔多塞(J. A. N. C de Condorcet)说："欧拉停止了计算，也停止了生命."

欧拉是一个多产的数学家，从 19 岁开始发表论文，直到 76 岁，半个多世纪写下了浩如烟海的书籍和论文，圣彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了 47 年.

欧拉的工作涉及的范围非常广泛. 首先，欧拉的工作使微积分取得了巨大的发展. 欧拉的《微分学》《积分学》等著作在很长时间内被当作课本使用，是微积分史上里程碑式的著作. 其次，欧拉的工作涉及常微分方程、偏微分方程、变分法、微分几何、方程论、数论等数学分支，有力地推动了这些数学分支的发展. 最后，欧拉也是一位伟大的力学家，他对物理学中的刚体运动和流体力学作出了重要的贡献.

欧拉的一生是奋斗的一生，他把全部身心都献给了数学事业，其顽强的毅力，努力拼搏而又孜孜不倦的奋斗精神永远值得我们学习.

习题 6—2

1. 收集整理伟大数学家欧拉的事迹和贡献，感受一个伟大数学家是如何勤奋努力、奋斗一生的.
2. 搜集有关图论的材料，体会欧拉思想的意义.

§3　高次方程

一、高次方程求根问题

古巴比伦人已经掌握二次方程的解法. 中世纪，阿拉伯数学家花拉子米在《代数学》中用代数方式处理了线性方程组与二次方程，第一次给出了一元二次方程的一般代数解法，使得二次方程的理论系统化，其中二次方程统一为一般形式

$$x^2+px+q=0.$$

花拉子米相当于得到一般的求根公式

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

二次方程的求根公式明确指出了二次方程的根与系数的关系，通过对方程的系数进行一定的加、减、乘、除、乘方与开方运算，可以把方程的根表示出来.

花拉子米的《代数学》被翻译成拉丁文后开始在欧洲传播. 不过，直到 15 世纪，人们还以为三、四次方程与化圆为方问题一样难以解决.

第一个突破是波伦亚大学的数学教授费罗(S. Ferro，1465—1526)大约在 1515 年作出的，他发现了形如 $x^3+mx=n(m,n>0)$ 的三次方程的代数解法.

1535 年，意大利另一位数学家塔塔利亚(Niccolò Tartaglia，1499? —1557)也宣称自己可以解形如 $x^3+mx^2=n(m,n>0)$ 的三次方程.

1545 年，卡尔丹(G. Cardano，1501—1576)在《大法》中公布了形如 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的一般三次方程的解法：

第一步，对带有二次项的三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$，总可以通过变换消去二次项，从而变成 $y^3+py=q(p,q>0)$ 的形式.

第二步，给出 $y^3+py=q(p,q>0)$ 的解如下：

$$y=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

1540 年，意大利数学家达科伊(T. da. Coi)向卡尔丹提出一个四次方程的问题，卡尔丹未能解决，但由其学生费拉里(L. Ferrari，

1522—1565)解决了，其解法也被卡尔丹写进《大法》中. 任意的四次方程总是可以通过变形，变为二次方程来得到解决. 四次方程的根和二次、三次一样可以求解，并且都可以通过相应的系数经过加、减、乘、除、乘方与开方得到.

数学家自然要考虑一般的五次或更高次的方程能否像二、三、四次方程一样来求解，也就是说对形如

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0,(\text{其中 } n\geqslant 5)$$

的代数方程，它的解能否通过只对方程的系数做加、减、乘、除、乘方和求正整数次方根等运算的公式得到呢?

二、一般五次方程不可解与阿贝尔

在意大利数学家成功地解决了三次方程和四次方程后，极大地鼓舞了当时的数学家. 他们立刻开始研究高次方程的解法，试图用根式解出五次、六次乃至更高次的方程. 这种努力持续了两个半世纪之久，却没有获得成功. 自然界的一个普遍法则是量变引起质变. 方程的次数高到一定程度，原来的方法就失效了.

历史上，第一个明确宣布"不可能用根式解四次以上方程"的著名数学家是拉格朗日(J. L. Lagrange，1736—1813). 拉格朗日在 1770 年发表的《关于代数方程解的思考》一文中，讨论了在他之前人们所熟知的解二、三、四次方程的一切解法，并且指出这些成功解法所根据的情况对于五次及更高次方程是不可能发生的. 拉格朗日试图得出这种不可能性的证明，然而经过顽强的努力(他的论文长达 200 页)之后，他没有获得成功，拉格朗日不得不坦言这个问题"是在向人类的智慧挑战".

受拉格朗日的影响，鲁菲尼(P. Ruffini，1765—1822)在 1799 年到 1813 年之间做过好几种尝试，要证明四次以上的方程不能用代数方法解出，但他的努力也没有成功.

迎接这一挑战的是在拉格朗日的文章发表后半个多世纪，来自挪威的一位年轻人. 1824 年，年仅 22 岁的数学家阿贝尔(N. H. Abel，1802—1829)自费出版了一本小册子《论代数方程，证明一般五次方程的不可解性》，在其中严格证明了以下事实：

阿贝尔

如果方程的次数 $n\geqslant 5$，并且系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 看成是字母，那么任何一个由这些字母组成的根式都不可能是方程的根.

这样，五次和高于五次的一般方程的求解问题就由阿贝尔解决了. 人们终于搞清楚了，在长达 3 个世纪的时间内，许许多多数学家用根号去解四次以上的方程的努力之所以付诸东流，其原因就在于这类方程没有解!

阿贝尔只活了27岁.他一生贫病交加,但却留下了许多创造性的贡献.他是一个穷牧师的儿子,家里有7个兄弟姐妹,他排行老二.因为他们没有钱,请不起家庭教师,小学教育基本上是由父亲来教.在13岁时,阿贝尔被送到挪威奥斯陆的天主教学校读书.1817年,可以说是阿贝尔一生的转折点.这时候,他有幸遇到霍姆伯厄老师.阿贝尔很喜欢这个新来的教师,他发现数学不像以前那样枯燥无味,而且很高兴自己能解决一些别的同学所不能解决的难题.第一学年末,在学生的报名书上,霍姆伯厄对阿贝尔的评语是"一个优秀的数学天才".

阿贝尔对数学的热忱越来越高,霍姆伯厄鼓励他,给他一些特别问题,而且借给他看自己在大学时学习的课本.霍姆伯厄后来回忆道:"从这时开始,阿贝尔沉迷进数学,他以惊人的热忱和速率向这门科学进军.在短期内他学了大部分的初级数学,在他的要求下,我私人教授他高等数学.过了不久,他就能独立地阅读法国数学家泊松的作品,念德国数学家高斯的书,特别是拉格朗日的书.他已经开始研究几门数学分支."

在中学的最后一年,阿贝尔开始了第一个抱负不凡的冒险——试图解决一般的五次方程问题.1820年,阿贝尔18岁时父亲去世了.家里的经济状况就更差了.霍姆伯厄希望阿贝尔能读大学,他相信自己遇上了一个空前伟大的数学家.于是,他尽其所能为这个年轻人寻找补助金,慷慨地倾其所有,支持阿贝尔的学业.阿贝尔取得了很大的成就,可是一直没有被人重视,大学毕业后长期找不到工作.后来,阿贝尔生了肺病,病情逐渐严重.许多数学家都非常同情阿贝尔的遭遇,都想办法为他谋取工作.在他死后两天,克列尔来信说,阿贝尔将被任命为柏林大学的数学教授.但是,这个消息来得太晚了!一位天才的数学家已经离去了.

三、五次可解方程

阿贝尔关于代数方程的工作只是证明对于一般的五次和五次以上的方程根式解是不可能的,但并不妨碍人们去求解一些特殊的代数方程.在阿贝尔之后,数学家所面临的一个问题就是:什么样的特殊方程能用根式来求解?

稍后,这个问题被一位同样年轻的法国数学家伽罗瓦(E. Galois, 1811—1832)解决了.伽罗瓦在1829～1831年间完成的几篇论文中,建立了判别方程根式可解的充分必要条件,从而宣告了历经300年之久的难题——方程根式可解性——彻底解决了.

伽罗瓦攻克的难题虽然是300年前的老问题,但他的思想却大大超出了他的年代.像阿贝尔一样,伽罗瓦的工作在他生前完全被忽视

了，而且和阿贝尔相比，伽罗瓦的身世更悲惨.

伽罗瓦出生在巴黎附近一个小镇的镇长家庭，家境本很优裕，但他生逢法国大革命的动荡时代. 在 18 岁那年，父亲因与天主教保守势力冲突而自杀. 从此，各种不幸接踵而至. 在父亲去世一个月之后，伽罗瓦报考他向往已久的巴黎综合工科大学又遭失败，原因可能是他在回答主考官提出的一个特殊问题时，作了不合时宜的回答. 后来，伽罗瓦考进了巴黎高等师范学校，但是，第二年因参加反对波旁王朝的"七月革命"而被校方开除，以后又因参加政治活动被捕入狱. 1832 年 5 月的一天，他的政敌利用爱情纠葛挑起一场决斗，伽罗瓦在决斗中身亡，死时不到 21 岁. 在决斗的前一天晚上，伽罗瓦预感到将不久于人世，在这种激烈的动荡和遭受种种打击的情况下，他利用极为有限的时间，整理了自己的研究成果，并交给了一个值得信赖的朋友. 谁也没有想到，这些成果导致了代数学的一场革命.

伽罗瓦的数学研究，可以看作是近世代数的发端. 这不仅是因为他解决了方程根式可解这样一个难题，更重要的是他所提出的群的概念，导致了代数学在研究对象、内容和方法上的深刻变革.

四、启示

1. 在思考问题的过程中，常常需要跳出习惯的思维定式，寻求新的思路和方法. 有时，换一个角度思考会使人得到意想不到的收获.

2. 青年人的头脑是最活跃的，他们的思维不容易受到束缚，更容易打破常规，发现和发明新的方法.

3. 两位年轻的数学家阿贝尔和伽罗瓦虽然经历坎坷，但是他们在短暂的生命历程中作出了杰出的贡献，他们对知识的无限执著以及勇于攀登科学高峰的精神值得我们学习.

对高次方程可解性和群的产生有兴趣的同学，可以参考专题课程《对称与群》《三等分角与数域扩充》.

习 题 6—3

收集和整理有关高次方程的资料，特别是两位年轻数学家阿贝尔和伽罗瓦的生平材料，学习他们在人生逆境中的奋斗精神和不拘泥于传统思维定式的创造精神.

§4　中国剩余定理

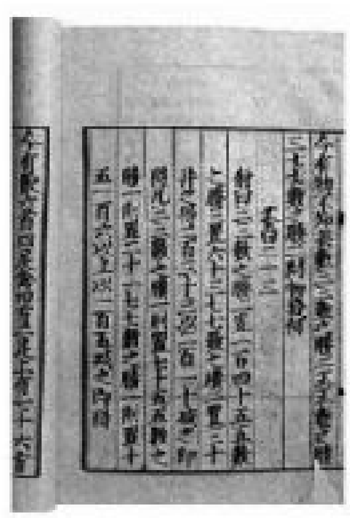
一、问题来源

中国古代数学源远流长且自成一体．虽然中国古代数学在发展中也出现过理论数学的萌芽，比如《墨经》(约公元前 4 世纪成书)中就出现了一些形式逻辑的法则，而且提出了一系列抽象的数学概念，诸如点(端，体之无厚而最前者也)，直线(直，参也)，圆(一中同长也)等，但是这些都没有被后人继承和发展．中国古代数学的一个显著特点就是重视实际问题的解决，比如中国古代的《九章算术》等许多数学著作就是以问题集的形式出现的，而且这种形式影响到了中国后来的数学著作的编写形式．

到了中世纪，中国数学更加表现出强烈的算法精神．此时对问题的解决已经不再局限于具体和单纯的计算，而是有了一个质的飞跃，开始解决某一类实际问题或科学问题，并且概括出带有一般性的计算方法．显然，这已经不再是简单的经验法则，而是一种归纳思想的产物．中国古代的数学与欧几里得几何的演绎风格截然不同．

由于中国古代数学注重实际问题解决和算法精神，使得中国古代数学的大部分问题来自社会和实际需要，从而这些问题在民间也广为流传．

韩信点兵的故事就是一个典型的例子，这个故事在我国民间广为流传，成为佳话．韩信是汉朝刘邦皇帝手下的一名大将军，剽悍威猛而又足智多谋、机敏过人．据说，为了保守军事机密，防止敌军知道他所率领的士兵人数，韩信在点兵时，先让士兵按从 1 到 3 的顺序报数，记下最后一名士兵所报之数；又让士兵按从 1 到 5 的顺序报数，记下最后一名士兵所报之数；最后又让士兵按从 1 到 7 的顺序报数，同样记下最后一名士兵所报之数．这样，韩信就很快计算出士兵的总数．实际上，韩信点兵就是今天数论中的同余问题．



《孙子算经》：物不知数

这种问题最早出现在我国古老的数学名著《孙子算经》之中，它以“物不知数”的题目给出．原题是：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”

“物不知数”问题用现代数学语言表示，就是求一次同余式组的解的问题：

求正整数 x,满足的条件为

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 2 \pmod{7}. \end{cases}$$

实际上,这个同余式等价于求下面的不定方程组的正整数解

$$\begin{cases} x = 3a + 2, \\ x = 5b + 3, \\ x = 7c + 2. \end{cases}$$

二、古人的解法

《孙子算经》中已经给出了这个"物不知数"问题的解法:"三三数之剩二,置一百四十;五五数之剩三,置六十三;七七数之剩二,置三十,并之,得二百三十三,以二百一十减之,即得."

这个解法还被一些文人墨客作成了诗,比如宋代的周密(1232—1289)就作了一首隐语诗:

三岁孩儿七十稀,五留廿一事尤其.
七度上元重相会,寒食清明便得知.

这里"上元"指正月十五元宵节,暗示数字 15;"寒食","清明"大约在冬至后三个半月,暗示数字 105.

到了明代,中国数学家程大位(1533.5.3—1606.9.18)在《算法统宗》(1593 年)中将这个问题的解法编成了妇孺皆知的口诀:

三人同行七十稀,五树梅花廿一枝.
七子团圆正半月,除百零五便得知.

现在看口诀的含义.

1. 用 70 乘被 3 除的余数:$70 \times 2 = 140$;
2. 用 21 乘被 5 除的余数:$21 \times 3 = 63$;
3. 用 15 乘被 7 除的余数:$15 \times 2 = 30$,然后加起来,得

$$70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 = 233.$$

4. $233 - 105 - 105 = 23$.

程大位的口诀里,前 3 句的意义:点出 3,5,7 与 70,15,21 的关系,后一句指出求最小正解还需减去两个 105.

三、问题的解

现在我们来解这一问题.分成 3 步:

首先,分解为简单问题.求数 P,Q,R,它们分别具有性质:

P 满足两个条件:(1)$5 \mid P, 7 \mid P$, (2)$P \equiv 1 \pmod{3}$;

Q 满足两个条件:(1)$3 \mid Q, 7 \mid Q$, (2)$Q \equiv 1 \pmod{5}$;

R满足两个条件：(1) $3|R,5|R$，　(2) $R\equiv 1 \pmod 7$.

其次，把它们叠加起来，就得到解：

$$2P+3Q+2R.$$

因为$2P+3Q+2R$除以3余2，除以5余3，除以7余2.

我们来求P的值，由P满足条件：$5|P,7|P$，可知P具有形式

$$P=5\times 7\times m(m\text{是自然数}).$$

如何确定m？没有巧的办法，只能直接算：

令$m=1$，得$P=35\equiv 2 \pmod 3$；

令$m=2$，得$P=70\equiv 1 \pmod 3$.

找到了！事实上只需作两次计算.

同理，由Q满足条件：$3|Q,7|Q$，可知Q具有形式

$$Q=3\times 7\times m(m\text{是自然数}),$$

确定m的值：令$m=1$，得$Q=21\equiv 1 \pmod 5$.

同理，不难求出　$R=15$.

这样一来，把求得的$P=70,Q=21,R=15$代入$2P+3Q+2R$，得到的解是：

$$2P+3Q+2R=2\times 70+3\times 21+2\times 15=233.$$

最后，我们知道，问题的解不是唯一的. 因为$3\times 5\times 7=105$，任何解加上105，或减去105仍是解. 最小正整数解是$233-105-105=23$.

我们从这个解出发，可以得到满足条件的所有解即一般解为

$$23+105n\quad(\text{其中}n\text{是自然数}).$$

先求出一个解，然后利用这个解再求出一般解的方法在数学中经常用到，比如求不定方程的解就是利用这样的方法来解决的.

四、秦九韶与大衍求一术

秦九韶(1202—1261)，我国南宋时期数学家，字道古，四川安岳人，他本人自称"鲁郡人"，即今天的山东曲阜一带. 早年随父亲外出，曾在南宋京都杭州太史局见习天文和历算. 1244年，1245年先后两次在健康府(今南京)做官，任职不久后便离职回家. 1261年左右又去梅州(今广东梅县)任职，不久死于任所. 1247年写成划时代巨著《数书九章》十八卷.

秦九韶

为了纪念和缅怀秦九韶，弘扬中华民族的传统文化，安岳县修建了秦九韶纪念馆，并于2000年底落成对外开放.

秦九韶在《数书九章》第一章"大衍术"中给出了"物不知数"的一般形式及其解法.

由于秦九韶的方法中所用的一次同余方程右边均为1，所以他称这种方法为"大衍求一术". 后来，"大衍求一术"竟然失传了500多年，

清朝黄宗宪(1608—1647)等人经过艰苦努力使其重新出现在世人的面前.

欧洲最早接触一次同余方程组问题的是意大利的斐波那契(L. Fibonacci, 1170—1250),但是他没有提出一般的理论和解法. 欧拉(1743 年)和高斯(1801 年)分别对一次同余方程组进行了深入的研究,重新独立发现了一次同余方程组的一般解法. 1852 年,英国在华的传教士伟烈亚力(Alexander Wylie, 1815—1887)将"物不知数"问题的解法传到欧洲. 1876 年,德国人马蒂生(L. Matthiessen)首先发现"大衍求一术"与高斯发现的一次同余方程组的一般解法是一致的. 这一发现受到当时数学史学家们的高度重视,当时著名的数学家 M. 康托看到马蒂生的这篇文章后,高度评价了"大衍求一术",并称发现这一方法的中国数学家是"最幸运的天才". 从此,西方将关于一次同余方程组求解的剩余定理称为"中国剩余定理". 又由于在中国该问题形式最早出现在《孙子算经》中,故在中国又称之为"孙子定理".

"中国剩余定理"是《孙子算经》中"物不知数"的算法的推广. 从"物不知数"问题到"大衍求一术"关于一次同余方程组的研究,形成了中国古代数学最具有特色的部分,充分展现了中国古代数学算法精神的魅力.

有兴趣的同学可以参看专题课程《初等数论初步》.

习 题 6—4

收集和整理中国古代的数学成就,体会中国数学家为世界数学发展所作出的巨大贡献.

§5　哥德巴赫猜想

一、问题的提出

哥德巴赫(Goldbach,1690—1764)原是一位德国教师,1725～1742年间在圣彼得堡科学院工作,为该院院士. 1742年,哥德巴赫在和他的好朋友、大数学家欧拉的几次通信中提出了关于正整数和素数之间关系的两个推测,用现代语言来说,就是:

(A) 每一个不小于6的偶数都是两个奇素数的和,即

$$n=p_1+p_2;$$

(B) 每一个不小于9的奇数都是3个奇素数的和,即

$$n=p_1+p_2+p_3.$$

这就是著名的哥德巴赫猜想.

我们把猜想(A)称为"关于偶数的哥德巴赫猜想",把猜想(B)称为关于"奇数的哥德巴赫猜想". 由于

$$2n+1=2(n-1)+3,$$

所以,从猜想(A)的正确性可以推出猜想(B)的正确性,可见关于偶数的哥德巴赫猜想更加基本.

下表表示30以内的偶数都可表示为两个素数之和.

6=3+3	8=3+5
10=3+7=5+5	12=5+7
14=3+11=7+7	16=3+13=5+11
18=5+13=7+11	20=3+17=7+13
22=3+19=5+17=11+11 26=3+23=7+19=13+13	24=5+19=7+17=11+13 28=5+23=11+17
30=7+23=13+17	

虽然欧拉没有能够证明这两个猜想,但是对它们的正确性是深信不疑的. 1742年6月30日,在给哥德巴赫的信中他写道:"我认为这是一个肯定的定理,尽管我还不能证明出来."

二、哥德巴赫猜想的历史足迹

哥德巴赫猜想从1742年提出,直至1920年,虽然许多数学家对

它进行了研究，但是，并没有得到实质性的结果，也没有提出有效的研究方法. 1921 年，英国数学家哈代(G. H. Hardy，1877—1947)在哥本哈根数学会的演讲中，宣称哥德巴赫猜想(A)的困难程度“是可以与数学中任何未解决的问题相比拟的”. 因此，哥德巴赫猜想不仅是数论，也是整个数学中最著名与最困难的问题之一.

1. 关于奇数的哥德巴赫猜想

就在一些著名数学家作出悲观预言和感到无能为力的时候，哥德巴赫猜想的研究出现了转机，从几个方面获得了进展.

哥德巴赫猜想第一次重大的突破是 20 世纪 20 年代获得的. 哈代、李特尔伍德(J. E. Littlewood)建立了圆法. 使用这种圆法，在假定一条未经证明的著名猜想——广义黎曼猜想成立的前提之下，他们证明了两个命题：

命题 1　每个充分大的奇数 n 都是 3 个素数之和，即

$$\boxed{n=p_1+p_2+p_3.}$$

命题 2　几乎所有偶数都是两个素数之和.

这个命题意味着，假设 $M(x)$ 表示不超过 x 而又不能表示为两个奇素数之和的偶数，那么

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}=0.}$$

俄国数学家维诺格拉多夫(I. M. Vinogradov)技高一筹. 他使得哥德巴赫猜想的重要结果有了全面突破. 1937 年，他基本证明了猜想(B)：

每一个充分大的奇数 n 都可以表示为三个素数之和：

$$n=p_1+p_2+p_3.$$

2. 关于偶数的哥德巴赫猜想

猜想(A)实在太困难了，数学家们开始研究容易证明的一些命题. 例如，每个充分大的偶数可以表示为素因数个数分别为 m，n 的两个自然数之和. 简记为$(m+n)$.

1920 年，挪威数学家布朗证明了每个大偶数均可以分解为两个自然数之和，其中，每一个自然数的素因子个数不超过 9，简记为命题(9+9).

到了 30 年代，数学家们已经证明了命题(6+6).

著名数学家华罗庚在中国最早研究了哥德巴赫猜想.

早在 1938 年，他就证明了“几乎所有偶数都是两个素数之和”.

1953 年，数学研究所建立了数论组，华罗庚就决定以哥德巴赫猜想作为数论组讨论班的中心课题. 在华罗庚的领导下，中国数学家在

研究哥德巴赫猜想方面取得一系列重要进展.

1957 年,著名数学家王元证明了命题(3+2).

在布朗的定理中,两个数都不能肯定为素数,如果能肯定其中一个数是素数,这样的命题可以记为:命题(1+c).

1948 年,瑞尼(A. Renyi)证明了下面的定理.

瑞尼定理 存在一个正常数 c,使每一个充分大的偶数都可以分解为两个自然数的和,其中一个自然数为素数,另一个自然数的素因数个数不超过 c.

自 1948 年以来,这种方式的证明不断有所进展.

1962 年,我国著名数学家潘承洞证明了(1+5);

1963 年,潘承洞与巴尔巴恩分别独立地证明了(1+4);

1965 年,维诺格拉多夫、布赫夕塔布和邦别里(E. Bombieri)都证明了(1+3);

1966 年,我国著名数学家陈景润证明了(1+2).

到目前为止,陈景润的结果仍然是世界上最好的结果.哥德巴赫问题的这个最佳结果,被国外数论专家誉为"筛法光辉的顶点",并称之为"陈氏定理".哥德巴赫猜想的最后证明,也许还在等待着数学方法上的新突破.

三、哥德巴赫猜想给我们的启示

1. 数学家解难题与我们做习题,经常处于相同的境地.当问题解决不了的时候,就需要将问题变一变,先解决一个相关的容易问题.在哥德巴赫猜想的研究中就采用了这种策略.

2. 数学问题解决固然重要,但更重要的是,在解决问题的过程中,需要创造新的数学知识和新的方法.

3. 陈景润的杰出成就使他得到广泛赞誉,不仅仅是因为"陈氏定理"使中国在哥德巴赫猜想的证明上处于领先地位,更重要的是以陈景润为代表的一大批中国数学家克服重重困难、不畏艰险、勇攀高峰的精神.为使中国成为 21 世纪世界数学大国,他们的精神将鼓舞和激励有志青年为之奋斗!

4. 研究哥德巴赫猜想需要有好的数学基础,需要了解前人所创造的思想、方法和结果,需要长期艰苦的努力,还需要有经验数学家的引领,否则,会白白浪费宝贵光阴.

习 题 6—5

收集中国数学家在解决哥德巴赫猜想中所作出的杰出贡献，体会他们从事科学研究的不屈不挠的奋斗精神.谈谈这些精神对个人事业发展的激励作用.

复习题六

1. 收集整理自己感兴趣的某个著名数学问题的资料，写成一篇科普文章. 体例可以多种多样，例如小说、传记、散文等.
2. 体会数学问题在数学发展中的作用.
3. 结合自己的学习情况，体会什么是好的数学问题.

◆ 复习小结建议

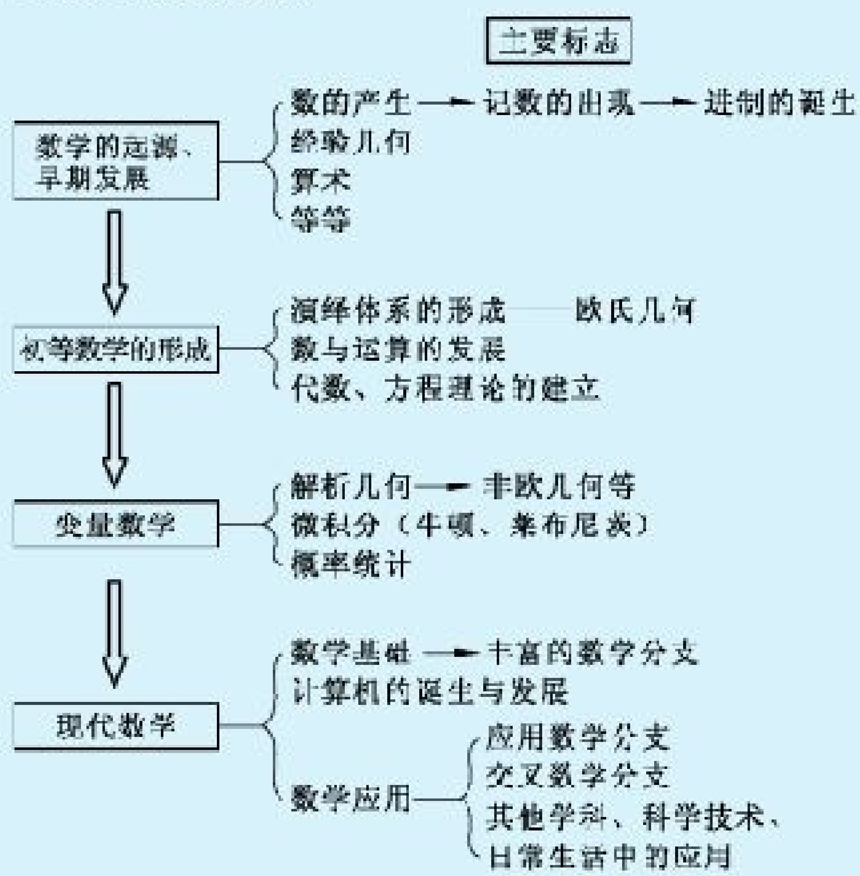
一、内容总结

我们对数学史的介绍，主要分成数学发展概述、数与符号、几何学发展史、微积分、无限、名题赏析 5 个部分．通过这些内容的学习，使我们对数学的产生与发展，有一个初步的认识和了解，同时体会和感受数学在人类社会发展中的重要作用．

数学不仅仅由计算、定理和证明组成，而且包括重要的数学思想和方法，还包括数学家进行创作的艰难过程，也包括他们解决问题时思想的转变等．

下面，我们把学过的数学史内容总结如下：

1. 数学发展的脉络



2. 数与符号

- 数与符号
  - 数是代数的核心
    - 数的表示与进位制的产生是人类社会发展的一件大事
    - 数的扩充：正整数、正分数、无理数、负数、零、复数
  - 数学符号是数学智慧的结晶，它贯穿于数学发展的始终

3. “形”研究的进展

经验几何 → 演绎几何 → 射影几何 → 解析几何 → 非欧几何　微分几何　拓扑学　分形几何　……

4.

- 人类文明发展史上的丰碑——微积分
  - 积分思想
  - 极限思想
  - 导数、微分思想
  - 微积分基本定理——微分与积分的桥梁
  - 微积分的创造者：牛顿、莱布尼茨

5. 影响人类智力、发展的源泉——无限

- 对无限的认识过程（集合论的创始人康托）
  - 集合论的完善
  - 促进数学基础的发展与完善
  - 促进数学哲学的发展，建立数理逻辑
  - 促进计算机的诞生与发展

6. 问题是数学的心脏，是数学发展的动力

- 数学名题
  - 费马大定理
  - 哥尼斯堡七桥问题
  - 高次方程
  - 中国剩余定理
  - 哥德巴赫猜想

二、思考下列问题：

1. 为什么要学习数学史?

2. 数学史的发展可以分成哪几个阶段? 在不同时期对中小学数学教育(包括内容)的影响.

3. 对比"数的发展历史"和我们"对数的认识过程".

4. 罗列我们学习过的和了解的数学符号，体会它们的含义，并对这些数学符号进行适当的分类，体会数学符号的逻辑体系和作用.

5. 几何学主要是研究什么的? 我们学过的平面几何、立体几何、解析几何以及这里介绍的射影几何等之间有什么区别和联系?

6. 结合几何学发展史的学习，谈谈自己学习几何的体会.

7. 中学中我们学习的数学，哪些是变量数学、哪些是常量数学? 它们的区别是什么?

8. 中学数学学习中，哪些数学知识与函数概念有关，体会函数在中学数学中的地位和作用.

9. 微积分中包含哪些数学思想，从数学发展的历史角度，谈谈为什么中学要开设"导数及其应用"的课程?

10. 谈谈自己所了解的无限概念.

11. 收集整理自己感兴趣的某个著名数学问题资料，体会数学问题在数学发展中的作用.

三、报告和论文的要求：

1. 概括自己所了解的数学发展历史.

2. 从数学发展历史的角度，结合自己数学学习的内容，总结自己认为重要的数学思想方法.

3. 从数学历史发展的角度，谈谈哪位数学家或者哪个数学历史事件对自己产生了重要的影响.

4. 撰写报告和论文的体裁可以多种多样，包括评论、传记、小说、散文等.

5. 史料真实，语言生动.

附录 1

参考书目

本书主要参考了以下3本书：

1. 李文林. 数学史教程. 北京：高等教育出版社，施普林格出版社，2002
2. M. 克莱因. 古今数学思想(1～4). 上海：上海科学技术出版社，2002
3. 张顺燕. 数学的源与流. 北京：高等教育出版社，2003

对数学发展史特别感兴趣的同学可参考以下书目：

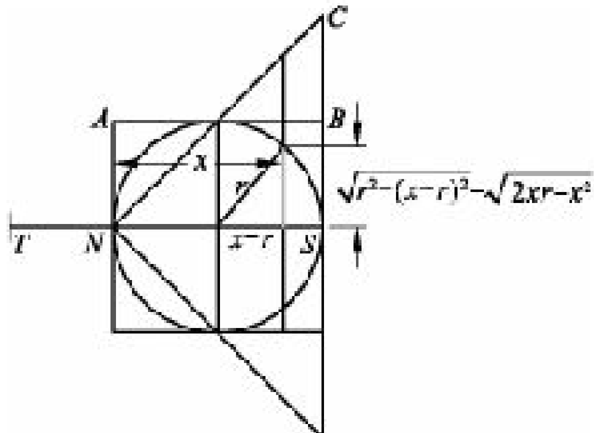
1. 胡作玄. 第三次数学危机. 成都：四川人民出版社，1985
2. 基斯·德夫林著. 数学：新的黄金时代. 李文林等译. 上海：上海教育出版社，1997
3. 李文林. 数学珍宝. 北京：科学出版社，2003
4. Victor J. Katz. 数学史通论. 李文林等译. 北京：高等教育出版社，2004
5. M. 克莱因. 西方文化中的数学. 张祖贵译. 上海：复旦大学出版社，2004
6. 张顺燕. 数学的思想、方法和应用. 北京：北京大学出版社，2004
7. 张顺燕. 数学的美与理. 北京：北京大学出版社，2004
8. R. 柯朗等. 数学是什么. 左平，张饴慈译. 上海：复旦大学出版社，2004

附录 2

阿基米德的平衡法推导球的体积

下面叙述的是阿基米德推导球的体积公式的过程.其中,用到了当时已知的圆柱和圆锥的体积公式.

定理　半径为 r 的球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.



证明　把球的直径放在 x 轴上.设 N 是它的北极,S 是它的南极,且原点与北极重合.画出 $2r\times r$ 的矩形 $NSBA$ 和△NSC.绕 x 轴旋转矩形 $NSBA$ 和△NSC,得到一个圆柱体和一个圆锥体,圆的旋转得到球体.然后从这三个立体上切下与 N 的距离为 x,厚为 Δx 的竖立的薄片.

这些薄片的体积近似为

球体:$\pi(2xr-x^2)\Delta x$;

柱体:$\pi r^2\Delta x$;

锥体:$\pi x^2\Delta x$.

取出球体和锥体的薄片,把它们的质心吊在点 T,使 $TN=2r$.这两个薄片绕 N 的合成力矩为

$$[\pi(2xr-x^2)\Delta x+\pi x^2\Delta x]2r=4\pi r^2 x\Delta x,$$

不难看出,这是圆柱割出的薄片处于原来位置时绕的力矩的 4 倍.

把所有这样割出的薄片绕的力矩加在一起,我们便得到

$$2r(\text{球的体积}+\text{圆锥的体积})=4r(\text{圆柱的体积}),$$

即

$$2r\left(\text{球的体积}+\frac{8\pi r^3}{3}\right)=8\pi r^4.$$

由此,我们就求出了球的体积 $V=\frac{4\pi r^3}{3}$.

附录 3

部分数学专业词汇中英文对照表

中文	英文
数学史	history of mathematics
数	number
符号	sign
数位(数字位置)	digital position
十进位值制	decimal scale
勾股定理	Pythagorean theorem
几何	geometry
欧几里得几何	Euclidean geometry
解析几何	analytic geometry
射影几何	projective geometry
微分几何	differential geometry
拓扑学	topology
分形几何	fractal geometry
积分	integral
极限	limit
圆周率	number π
微分	differential
微积分	calculus
无限	infinite
集合论	set theory
基数	cardinal
费马大定理	Fermat last theorem
哥德巴赫猜想	Goldbath conjecture
中国剩余定理	Chinese remainder theorem
图论	graph theory
高次方程	equation of higher degree
群	group

附录 4

信息检索网址导引

1. 中国基础教育网

http://www.cbe21.com/

简介：中国基础教育网是由教育部基础教育课程教材发展中心与北京师范大学共同创建的，面向全国基础教育工作者、学生、家长的专业服务平台，是中国基础教育领域的综合性网站.

2. 基础教育教材网

http://www.100875.com.cn/

简介：基础教育教材网是由北京师范大学出版社创建的一个综合性网站，内容主要涉及新课程标准改革研究、课题研究、教学研究、评价研究和教学资源等几个方面. 网站在提供教学实例、教学课件的同时，也给教师和学生提供了交流互动的宽松平台.

后　记

本套教材是按照国家教育部于2003年4月颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.我们在编写过程中强调了数学课程的基础性和整体性,突出了数学的思想性和应用性,尊重学生的认知特点,创造多层次的学习活动,为不同的学生提供不同的发展平台,注意发挥数学的人文教育价值,好学好用.

教材的建设是长期、艰巨的任务,每一位教师在教学实践中要自主地开发资源,创造性地使用教材.我们殷切希望教材的使用者与我们携手合作,对教材的逐步完善提供有利的支持,促进基础教育课程改革的深入发展.

本套教材的编委会组成如下(按姓氏笔画排序):

王希平、王尚志、王建波、任志瑜、刘美仑、吕世虎、吕建生、李亚玲、李延林、汪香志、严士健、张丹、张饴慈、张思明、姚芳、赵大悌、徐勇、戴佳珉.

由于时间仓促,教材中的错误在所难免,恳请广大使用者批评指正.

北京师范大学出版社